أساسيات في المصفوفات والمتجهات

الأستاذ
عزام عبد الرحمن صبري



الدار المنهجية
للنشر والتوزيع

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ

إِلَى عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

أساسيات في
المصفوفات والمتجهات

أساسيات في المصفوفات والمتجهات

الأستاذ
عزام عبد الرحمن صبري

الطبعة الأولى
2015م - 1436هـ



الدار المنهجية
للنشر والتوزيع



الدار المنهجية
للنشر والتوزيع

رقم التصنيف:512.943
أساسيات في المصفوفات والمتجهات
آ. عزام عبد الرحمن صبري
الواصفات: المصفوفات // المتجهات الرياضية /

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2014/10/4911)

ISBN 978-9957-593-46-9 ردمك

عمان – شارع الملك حسين – مجمع الفحيص التجاري
هاتف: 4611169 6 962+ ص . ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن
DAR ALMANHAJIAH Publishing - Distributing
Tel: + 962 6 4611169 P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
E-mail: info@almanhajiah.com

الفصل الأول
المصفوفات

الفصل الثاني
المحددات

الفصل الثالث

فضاء المتجهات الحقيقية

الفصل الرابع
التحويلات الخطية

المقدمة

نظراً لأهمية المصفوفات والمتجهات في كثير من التطبيقات العملية الحياتية ولدخول هذا الموضوع في كثير من العلوم الأخرى ونظراً لحاجة أبنائنا الطلبة والمهتمين في هذا الموضوع إلى مرجع يبسط لهم هذه المادة بشكل جيد فقد قمنا بإعداد هذا الكتاب سائلين المولى أن نكون قد وفقنا في إعادة الهدف المنشود وقد تناولنا في هذا الكتاب والذي يمثل مادة المصفوفات والمتجهات لفصل دراسي كامل والمتضمن أربعة فصول ففي الفصل الأول تناولنا المصفوفات والعمليات عليها وفي الفصل الثاني تناولنا المحددات وخصائصها وحل أنظمة المعادلات بينما الفصل الثالث تناولنا المتجهات والعمليات عليها أما الفصل الرابع فقد تناولنا التحويلات الخطية ومصفوفة التحويل الخطي وأنواع التحويلات الخطية.

وإنني أتطلع إلى ملاحظات الزملاء والمهتمين في هذا المجال حتى نأخذها بعين الاعتبار في الطبعات القادمة.

وبالختام فلا يفوتني إلا أن أتقدم بالشكر الجزيل إلى كل من أسهم في إخراج الكتاب وأخص بالذكر فريق الصف المتكون من الأخوة سلام بولص وأحمد أديب منير الذين بذلوا الجهد الكبير لإخراجه.

والله ولي التوفيق !!!

المؤلف

عزام عبد الرحمن صبري

الفصل الأول
المصفوفات

الفصل الأول
المصفوفات

1-1مقدمة:

تعتبر المصفوفات من المفاهيم الحديثة في مجال الرياضيات وتطبيقاتها .وقد لاقت اهتماما كبيرا من علماء الرياضيات حيث وجدوا لهم مجالا كبيرا من خلالها للبحث عن مجالات تطبيقها في الحياة العملية وقد دخلت مجالات كثيرة ساعدت في حلول المعادلات ذات المجاهيل الكثيرة من حيث وعدد المعادلات .وهذا يحصل غالبا في التطبيقات الإحصائية والاقتصادية وفي مجال الإنتاج وغيرة من المجالات الأخرى وقبل الخوض في العمليات على المصفوفات لابد من التعرف على ماهية المصفوفة ومكوناتها وأنواعها إلى ما شابه ذلك من المفاهيم .

تعريف(1-1): المصفوفة هي منظومة من الإعداد الحقيقية وضعت ضمن أقواس متعامدة لتعطي اسما ، وقد أصطلح على أن يكون أحد الأحرف الأبجدية إنكليزية Z,A,B,C....... لتأخذ الشكل التالي

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويمكن صياغة الصورة أعلاه على النحو

$$A=\lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}, i=1,2,\ldots\ldots,m, j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

وتدل m على عدد الصفوف في المصفوفة بينما يدل n على عدد الأعمدة وكذلك يدل m×n على رتبة المصفوف وتسمى العناصر

$$a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{1n}$$

مداخل المصفوفة .

وتكون مداخيل المصفوفة ناتجة من تقاطع الصف مع العمود الدال على موقع المدخل ويكون عدد مداخيل المصفوفة ناتج من العلاقة التالية

عدد المداخيل=$m \times n$

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد المثال التالي

مثال (1-1) : لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاده 1) رتبة المصفوفة 2) عدد مداخل المصفوفة A

3) قيم المداخيل $a_{33}, a_{11}, a_{12}, a_{23}$ 4) عدد الصفوف المصفوفة وعدد الأعمدة فيها

الحل : 1) رتبة المصفوفة 3×3

2) عدد المداخيل $3 \times 3 = 9$

3) قيم المداخيل المطلوبة $a_{33}=1, a_{11}=2, a_{12}=3, a_{23}=0,$

4) عدد الصفوف =3، وعدد الأعمدة =3،

ملاحظة : أي مصفوفة على الصورة العامة يمكن كتابتها كمصفوفات صفوف على النحو التالي

$$A_1 = [a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots a_{1n}], A_2 = [a_{21}\ a_{22} \ldots\ldots a_{2n}] \ldots$$
$$A_m = [a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ldots a_{mn}]$$

وكذلك يمكن كتابتها على شكل مصفوفات أعمدة

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots\ldots, A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

1-2 تساوي مصفوفتين

تعريف(1-2) لتكن لدينا المصفوفتان

$$B = [b_{ij}], A = [a_{ij}]$$

فإذا كان لكل i,j $a_{ij}=b_{ij}$ فإننا نقول أن المصفوفتين A=B أو بتعبير آخر $|a_{ij}|=|b_{ij}|=$

وبصورة عامة تتساوى المصفوفتان إذا كانت المداخيل المتناظرة متساوية أي إذا

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

كانت

وحتى تكون المصفوفتان A,B متساويتان أي A=B إذا كان

$$a_{11}=b_{11}, a_{12}=b_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{33}=b_{33}$$

مثال (2-1): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

فهل المصفوفتان A,B متساويتان

الحل: A≠B لان $a_{21} \neq b_{21}$ على الرغم من أن لهما نفس الرتبة

مثال(3-1): إذا كان لدينا المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فهل المصفوفتان A,B متساويتان؟

الحل: إن رتبة المصفوفة A هي(2×2) أما رتبة المصفوفة B هي (2×3) وبما أن رتبة المصفوفتان غير متساويتين أي (2×3)≠(2×2) وعلية فانهما غير متساويتين

مثال(4-1): على اعتبار ان

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & y & z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & x & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

المطلوب إيجاد مجموع $x + y + z + t$

الحل: بما أن المصفوفتان متساويتين فمن هذه الخاصية فان العناصر المتناظرة متساوية وعلية فإننا نجد أولا قيم المجاهيل ثم نأخذ المجموع أي

$$x = -3, y = -4, z = 2, t = -1$$

وعليه فان $x + y + z + t = -3 + (-4) + 2 + (-1) = -6$

مثال(1-5): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 2x - y & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3x + y \end{bmatrix}$$

وكانت المصفوفتان متساويتين فأوجد قيم x,y ثم أوجد $y+x$

الحل: نجد أولا قيم x,y على النحو التالي بما أن $A=B$ فان

$$2x-y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$3x+y=6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بجمع (1)مع(2) $5x=10 \Rightarrow x=2$

وبالتعويض عن x في معادلة(1) نجد أن

$$2(2)-y=4 \Rightarrow y=0$$

وعلية فان $x+y=2+0=2$

1-3 أنواع المصفوفات: kinds of Matrices

هناك الكثير من هذه الأنواع ولكن ستتركز دراستنا على أهم هذه المصفوفات

1) المصفوفة المربعة Square Matrix

تعريف(1-3): إذا كان عدد صفوف مصفوفة ما مساويا لعدد الأعمدة فانه يقال لهذه المصفوفة بالمصفوفة المربعة وتكون صورتها العامة على النحو التالي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال(1-6): هل المصفوفات التالية
مصفوفات مربعة ؟

الحل: المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة(3x3) بينما المصفوفة B ليست مصفوفة مربعة لان رتبتها (2x3).

$$A=\begin{bmatrix}2&4&1\\3&2&-1\\4&0&5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\2&4&6\end{bmatrix}$$

2) المصفوفة الصفرية : Zero Matrix

تعريف(1-4): تكون المصفوفة مصفوفة صفرية إذا كانت جميع مداخيلها صفرا فالمصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}_{3\times2},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2\times2},C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{3\times3},$$

جميعها مصفوفات صفرية ويمكن التعبير عن المصفوفة الصفرية

$$A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{mxn}=[0]_{mxn}=0_{mxn}$$

3) المصفوفة المحايدة أو الوحدة : Identity Matrix

$$A=\lfloor a_{ij}\rfloor$$

تعريف(1-5): يقال للمصفوفة بأنها المصفوفة المحايدة للضرب إذا كانت جميع عناصر القطر الأول للمصفوفة 1 وباقي عناصرها الأخرى صفرا بحيث تكون المصفوفة مربعة ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تدل على رتبة المصفوفة المربعة و الصورة العامة لهذه المصفوفة

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&....&0\\0&1&0&....&0\\.....&.....&.....&.....&.....\\0&0&0&.....&1\end{bmatrix},I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},I_1=[1]$$

4) المصفوفة المتماثلة: Symetric Matrix

تعريف(1-6): يقال للمصفوفة المربعة بأنها مصفوفة متماثلة حول القطر الأول إذا كانت العناصر فوق القطر الأول مساوية للعناصر تحت القطر الأول

مثال(1-7): هل المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 7 & -3\\ -5 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة؟

الحل: المصفوفة A مصفوفة متماثلة لان جميع العناصر فوق القطر الأول مساوية لجميع العناصر تحت القطر الأول.

5) المصفوفة المتماثلة العكسية : Anti-Symetric Matrix

تعريف(1-7): يقال للمصفوفة A بأنها متماثلة عكسية إذا كانت عناصر المصفوفة فوق القطر الأول مساوية عناصر المصفوفة تحت القطر الأول عدديا ومخالفة لها في الإشارة وكانت عناصر القطر الأول صفرا.

مثال (1-8): هل المصفوفة المربعة

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -4\\ -3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة متماثلة عكسيا ؟

الحل: نعم المصفوفة A متماثلة عكسيا لأنها حققت الشروط الواردة في التعريف.

6)المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

تعريف(1-8): يقال للمصفوفة المربعة بأنها قطرية إذا كانت عناصر القطر الأول تختلف عن الصفر وباقي العناصر صفرا

مثال(1-9): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات قطرية ؟

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3},B=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}_{2\times2},C=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}_{4\times4}$$

الحل: نعم تمثل مصفوفات قطرية لان عناصر قطرها الرئيسي أعدادا حقيقية تختلف عن الصفر وباقي عناصرها صفرا.

7) المصفوفة العددية

تعريف(1-9): تسمى المصفوفة القطرية التي يتساوى فيها عناصر قطرها الرئيسي
وباقي العناصر صفراً بالمصفوفة العددية وهي تمثل حالة خاصة من المصفوفة القطرية .

مثـال(1-10): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات عددية ؟

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{3\times3},B=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

الحل: نعم مصفوفة عددية لأن عناصر قطرها الرئيسي متساوية .

8) مبدول المصفوفة (Transpose of a Matrix) :

تعريف(1-10): يقال للمصفوفة

$$A`= A' =[a_{ji}]_{n\times m}$$

الناشئة من تبديل صفوف المصفوفة

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

بأعمدتها بمبدول المصفوفة A .

مثال(1-11): إذا كان

$$B=\begin{bmatrix}4 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 5\\-1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

فأوجد A^t ، B^t

الحل: باستخدام التعريف أعلاه فنقوم بتبديل عناصر الصفوف لتصبح عناصر للأعمدة في مبدول المصفوفة وعليه فان :

$$A'=\begin{bmatrix}1 & -1\\-3 & 4\\5 & 0\end{bmatrix}, B'=\begin{bmatrix}4 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

1-4 العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices):

هناك الكثير من العمليات على المصفوفات كما هو الحال في عمليات الجمع والطرح والضرب وهكذا وسنوضح بعض هذه العمليات .

1-4-1 : عملية الجمع على المصفوفات Addition operation on Matrices

تعريف(1-11): لتكن لدينا المصفوفتان

$$A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$$

لهما نفس الرتبة فالمصفوفة الناتجة من جمع عناصر المصفوفتين المتناظرة جمعا عدديا تسمى بمصفوفة الجمع للمصفوفتين A, B وتسمى بالمصفوفة C . أي

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}]=C$$

وإذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

فان المصفوفة الناتجة

$$C=[c_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: تسمى المصفوفة

$$[0]_{m\times n}$$

بمصفوفة محايدة بالنسبة لعملية الجمع لباقي مجموعة المصفوفات أي :

$$[0]_{m\times n}+[a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}+[0]_{m\times n}$$

مثال(1-12): أوجد إن أمكن ناتج الجمع بين المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: بالنظر إلى رتبة كل من المصفوفتين نلاحظ أن رتبة A هي (2×3) بينما رتبة B هي (2×2) وعليه فانه لا يمكن جمع المصفوفتين A, B لأنه ليس لهما نفس الرتبة .

مثال (1-13) : إذا كانت لدينا المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج A+B ، B+A وماذا تستنتج ؟

الحل:

$$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-3 & 2+1 \\ 1+4 & 4-2 \\ 2+0 & 5+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=C$$

$$B+A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+3 & 1+2\\ 4+1 & -2+4\\ 0+2 & 2+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix}=C$$

نلاحظ أن A+B=B+A=C أي أن الجمع يحقق الخاصيـة التبديليـة علـى جمـع المصفوفات .

مثال(1-14): إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{50} & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-\sqrt{18} & 2\\ \log_3 x & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4^y & 2\\ \log_9 16 & 2\end{bmatrix}$$

وكان A+B=C أثبت أن x.y = 1

الحل:

$$A+B=\begin{bmatrix}\sqrt{50} & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sqrt{18} & 2\\ \log_3 x & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\sqrt{2} & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\sqrt{2} & 2\\ \log_3 x & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 2\\ 1+\log_3 x & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4^y & 2\\ \log_9 16 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4^y=2\sqrt{2}\Rightarrow 2^{2y}=2^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 2y=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{4}$$

$$1+\log_3 x=\log_3 3+\log_3 x=\log_9 16\Rightarrow \log_3 3x=\log_3 4\Rightarrow 3x=4\Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$x.y=\frac{4}{3}.\frac{3}{4}=1$$

وهو المطلوب.

1-4-2 معكوس المصفوفة الجمـعي :

تعريف(1-12): لتكن لدينا المصفوفة

$$A=\lfloor a_{ij}\rfloor$$

فإننا نقول للمصفوفة

$$-A=-\lfloor a_{ij}\rfloor$$

بالمصفوفة العكسية بالنسبة لعملية الجمع للمصفوفة A بحيث

$$A+(-A)=(-A)+(A)=0_{m\times n}$$

ولإيجاد المعكوس الجمعي للمصفوفة A نقوم بضرب كل عنصر من عناصر A في -1.

مثال(1-15): إذا كان لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد معكوس المصفوفة الجمعي

الحل: كما سبق وأن ذكرنا أنه لإيجاد معكوس المصفوفة الجمعي نضرب جميع عناصر المصفوفة A في 1- لينتج

$$-A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & -3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

وهذا هو معكوس A الجمعي.

1-4-3 عملية الطرح على المصفوفات :

تعريف(1-13): لتكن المصفوفتان

$$B=[b_{ij}]_{m\times n}\text{،}A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

من الرتبة m×n فان الفرق بين المصفوفتين A, B ما هو إلا مجموع المصفوفة A مضافاً إليها معكوس المصفوفة الجمعي للمصفوفة B وبصيغة الرموز فإن

$$A-B=A+(-B)=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}]+[-b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]$$

مثال(1-16): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ -2 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد A-B

الحل:

$$A-B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4 & 6\\ -2 & 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -4 & -6\\ 2 & -3 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -5 & 1\\ 5 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

نظرية (1-1): إذا كان لدينا المصفوفات A, B, C,0, لها نفس الرتبة وتحقق الخصائص التالية :

$$1)A+B=B+A$$

$$2)A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$3)A+0=0+A=A$$

$$4)A+(-A)=(-A)+A=0$$

فان مجموعة المصفوفات المكونة لهذه المصفوفات وعملية الجمع تشكل زمرة ابدالية.

تعريف(1-14): لتكن

$$k\in R, A=\lfloor a_{ij}\rfloor$$

فانه يقال

$$kA=k\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}=\lfloor ka_{ij}\rfloor_{m\times n}$$

بأنه حاصل ضرب عدد حقيقي k في المصفوفة A أي أنه إذا كان

$$k.\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{bmatrix}$$

أي أنه لضرب مصفوفة في عدد فإننا نضرب كل عنصر في A في العدد k .

مثال(1-17): إذا كان لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5\end{bmatrix}$$

أوجد ناتج 3A

الحل:

$$3A=3\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9 & 12\\ -3 & 6 & -15\end{bmatrix}$$

ملاحظات:

1) ليكن لدينا المصفوفة

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

والصفر عدد حقيقي فانه ينتج

$$0.A=0.[a_{ij}]_{m\times n}=[0.a_{ij}]_{m\times n}=[0]_{m\times n}=0_{m\times n}$$

2) لجمع مصفوفة مع عدد حقيقي فإننا نضرب العدد الحقيقي بمصفوفة محايده من نفس الرتبة وناتج الضرب يجمع بالمصفوفة الأصلية.

نظرية(1-2): لتكن لدينا المصفوفات A, B وان لدينا العددان الحقيقيان a, b فان

$$1)a(A+B)=a.A+a.B$$
$$2)(a+b)A=a.A+bA$$
$$3)a(bA)=(ab).A$$
$$4)1.A=A,0.A=0$$

مثال(1-18): إذا كان لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

فأوجد 3A+5.

الحل:

$$3\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+5=3\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ -9 & 17\end{bmatrix}$$

مثال(1-19): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة3A-5B

الحل:

$$3A-5B=3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 7\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & -3 & 6\\ 6 & 12 & 21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 0 & 25\\ -10 & -15 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 31\\ -4 & -3 & 16\end{bmatrix}$$

مثـال(1-20): أوجد قيم x+y لتحقق المعادلة

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}-y\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$$

الحل: نجد ناتج حواصل الضرب على النحو التالي :
ومن تساوي المصفوفتان نجد أن

$$\begin{bmatrix}2x\\-x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4y\\-7y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-10\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2x & -4y\\-x & -7y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-10\end{bmatrix}$$

$$2x-4y=2$$

$$\underline{-2x-14y=-20}$$

$$2x-4y=2$$

$$\underline{2.(-x-7y=-10}$$

$$2x-4(1)=2\Rightarrow 2x-4=2\Rightarrow 2x=2+4$$

$$2x=6\Rightarrow x=3$$

وبالتعويض عن قيمة y = -1 في أحد المعادلتين وحل المعادلة نجد قيمة x

$$x+y=3+1\Rightarrow x+y=4$$

لهذا فان

$$-18y=-18\Rightarrow y=1$$

1-4-4 حـاصل ضرب مصفوفتين (Product of Two Matrices) :

تعريف(1-15): إذا كان لدينا المصفوفة A من الرتبة m×n والمصفوفـة B من الرتبة n×p فنسمي المصفوفة

$$C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{m\times p}$$

الناتجة من حاصل ضرب المصفوفة

$$A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$$

في المصفوفة

$$B = [b_{ij}]_{n\times p}$$

والتي تنتج من العلاقة التاليـة :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i1}\, b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}; \; i = 1,2,\dots,m, \; j = 1, 2, \dots, p$$

وعليه فان

$$[a_{ij}]_{n\times p}.[b_{ij}]_{n\times m} = [c_{ij}]_{m\times m}$$

أو A.B=C

وعليه فإننا عند ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى فإننا نضرب عنـاصر الصـف الأول في عناصر العمود الأول المقابلة ثم جمع نواتج حاصل الضرب .

ملاحظـة: عند عملية الضرب فانه يجب أن يتسـاوى عدد الأعمدة فـي المصفوفـة الأولى مع عدد صفوف المصفوفة الثانية.

مثـال(1-21): إذا كان لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

فأوجد حاصل ضربهما ؟

الحل:

$$A.\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 22 \\ -5 & 5 & -16 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مثـال(1-22): إذا كان لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد A.B

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 24 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 29 \end{bmatrix}$$

مثال(1-23): إذا كان لدينا المصفوفتان $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد A.B ، B.A وماذا تستنتج ؟

الحل : $A.B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+6 & 4+6 \\ 1+4 & -4+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$B.A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1-4 & -3+8 \\ 2-2 & 6+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A.B \neq B.A$

ملاحظة:

1) ضرب المصفوفات لا يحقق خاصية الإبدال .

2) ضرب المصفوفة في المصفوفة المحايدة يعطي المصفوفة الأصلية . وعليه فان المصفوفة المحايدة لا تؤثر في عملية الضرب .

مثال(1-24): إذا كان لدينا المصفوفتان $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد A.I وماذا تستنتج ؟

الحل : $A.I=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}=A$

أي أننا نستنتج أن المصفوفة A لم تتأثر من عملية الضرب .

مثال(1-25): إذا كان $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ أوجد A.B

الحل: $A.B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفتين قطريتين فان حاصل ضرب هاتين المصفوفتين هو حاصل ضرب العناصر المتقابلة على القطرين وباقي العناصر صفراً .

نظرية(3-1): إذا كان لدينا مصفوفتان A, B فان
1) إذا كان $A.B = 0$ فليس بالضرورة أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$.
2) إذا كان

$$A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times k} \Rightarrow A(BC) = (AB)C$$

3) إذا كان لدينا المصفوفتين $B_{m\times n}$ ، $A_{m\times n}$ وكذلك $C_{n\times p}$ فان

$$(A+B)\,C = A.C + B.C$$

4) إذا كان $C_{m\times n}$ ، وكان $A_{n\times p}$ ، $B_{n\times p}$
5) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ، المصفوفة B من الرتبة $n\times p$ وكان $k, r \in R$ فان

$$a)A(kB) = (k.A).B = k(A.B)$$

$$b)(k.A)(r.B) = (kr)(A.B)$$

6) إذا كان $AB=AC, A?0$ فقد لا يكون $B = C$

مثال(26-1): إذا كان لدينا $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $A . B$

الحل :

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4+4.(-1) & 1.0+4.0 \\ 0.4+0.(-1) & 0.0+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه على الرغم من أن كلاً من $A \neq 0, B \neq 0$ إلا أن $A . B = 0$

مثال(27-1) لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

، والمطلـــــوب

ايجاد $A\,(B\,.\,C)\,,\,(A\,.\,B)\,.\,C$ .A ثم ماذا تستنتج ؟

الحل: نبدأ بإيجاد

$$A.B=\left(\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & -6\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A.B).C=\begin{bmatrix}0 & -6\\1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\-1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & -6 & -12\\1 & -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\-1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\-1 & -1 & 4 & 2\\-3 & 2 & -3 & 6\end{bmatrix}$$

$$A.(B.C)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\-1 & -1 & 4 & 2\\-3 & 2 & -3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & -6 & -12\\1 & -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

نستنتج أن $(A\ .\ B)\ .\ C = A\ .\ (B\ .\ C)$ أي أن ضـرب المصفوفـات يحقـق الخاصية التجميعية .

مثـال(1-28): لتكـن $B=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{bmatrix}$ أوجـد المصفوفـة C التــي تحقـق العلاقة

$$A.C=C+B$$

الحل : بالنظر للطرف الأيمن نلاحظ أن رتبة المصفوفة B هي 2×1 وحتى يمكن جمعها مع المصفوفة C لابد أن تكون رتبة المصفوفة C نفس رتبـة المصفوفـة B أي أن رتبة المصفوفة C هي 2×1 أيضاً وعليه سنفرض أن $C=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

$$A.C=C+B\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+3b\\-2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+6\\b+2\end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين فان

$$a+3b=a+b\rightarrow 3b=6\rightarrow b=6$$
$$-2a+b=b+2\rightarrow -2a=2\rightarrow a=-1$$

وعليه فان المصفوفة $C=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

مثـال(1-29) : حل المعادلة المصفوفية التالية $x-\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}-4=0$

الحل: ننقل الثوابت في طرف ونبقي المجهول في طرف آخر

$$x=\begin{bmatrix}-1&1\\2&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.1+1.3&-1.0+1.2\\2.1+1.3&2.0+1.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}2&2\\5&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&2\\5&-2\end{bmatrix}$$

1-5: قوى المصفوفة المربعة Power of Square Matrix

تختلف قوى المصفوفات عنها في الأعداد الحقيقية وسنرى ذلك من خلال الأمثلة ونبدأ بإعطاء التعريف التالي

تعريف (1-16): إذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة n وكان $k\in N^+$ فان قوى المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$A^0=I_n,(A)^1=A,(A)^2=A.A,A^3=A.(A)^2,....(A)^k=A.(A)^{k-1}$$

مثال (1-30): إذا كان $A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-3\end{bmatrix}$ فأوجد $(A)^{1986}$

الحل :

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+0&6-6\\0+0&0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0\\0&9\end{bmatrix}=9.\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=9$$

ولكون $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, I^n=1$ فان

$$A^{1986} = (A^2)^{993} = 9^{993}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{993} = 9^{993}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= (3^2)^{993}.1 = 3^{1986}$$

مثال (1-31): إذا كان لدينا $A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ أوجد A^{12}

الحل: نعلم أن

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2 & -1+1\\2-2 & 2+1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = 3.\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 3.1 = 3$$

وعليه فان $A^{12}=(A^2)^6=3^6 \,.\, 1^6 = 3^6 \,.1 = 3^6$

مثال(1-32): إذا كانت عناصر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix}x & y\\y & x\end{bmatrix}$$

أعدادا موجبة وكان مجموع عناصر المصفوفة A^2 يساوي 98 فأوجد $x+y$

$$(A)^2 = A.A = \begin{bmatrix}x & y\\y & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\y & x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x^2+y^2 & .\,2xy\\2xy & x^2+y^2\end{bmatrix}$$

$$x^2+y^2+2xy+x^2+y^2+2xy = 98$$

وعليه فان مجموع الحدود

$$2(x^2+y^2+2xy) = 98 \Rightarrow x^2+2xy+y^2) = 49$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 49 \Rightarrow x+y = 7$$

مثال(1-33): إذا كان،

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$\forall n \in N^* (A)^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ n.2^{n-1} & 2^n \end{bmatrix}$$

الحل: سنثبت ذلك باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي وذلك باتباع الخطوات السابقة

أولا: نثبت صحة العبارة $p(1)$ أي عندما $n=1$

$$(A)^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 0 \\ 1.2^0 & 2^1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$

ثانيا: نفرض صحة العبارة $n = k$ أي أن

$$(A)^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k.2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$$

ثالثا: نثبت صحة العبارة عندما $n = k+1$ أي أن

$$(A)^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ (k+1)2^k & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

لذا نضرب ما فرضناه في ثانيا ولكلا الطرفين في A أي

$$A^1.A^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k.2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^k + k.2^k & 2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ (k+1).2^k & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = k+1$

مثال(34-1): لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وكان

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

وبوضع A بدلا من x أوجد المصفوفة $f(A)$

الحل: بوضع A بدلا من x فان

$$f(A)=(A)^2-3(A)+4.A^0$$

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 2+0\\ -1+0 & -2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

1-6 مبدول المصفوفة Transpose of matrix

لقد سبق وأن تعرضنا إلى مفهوم المبدول للمصفوفة من خلال أنـواع المصـفوفـات والان سنتوقف عند هـذا المفـهوم مـرة أخـرى لنتنـاول الأمثلـة والخصـائص ونبـدأ بإعطاء التعريف التالي

تعريف(1-17) يقال للمصفوفة الناتجة من تبديل صفوف المصفوفة

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}$$

بأعمدة المصفوفة بمبدول المصفوفة A وسنرمز لها بالرمز

$$A^t=[a_{ji}]_{n\times m}$$

أو قد نرمز للمبدول بالرمز `A

مثال(1-35): لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

أوجد A^t,B^t

الحل: حسب التعريف فان

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 7\end{bmatrix},B^t=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

نظرية (1-4):1) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة m×n فان $(A^t)^t=A$

2)إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ،

$$k \in R \Rightarrow (kA)' = kA'$$

3) إذا كان A,B مصفوفتان من الرتبة $m\times n$ فان $(A+B)^t=A^t+B^t$

4) إذا كان لدينا المصفوفتان $A_{m\times n}$ من الرتبة $m\times n$ والمصفوفة $B_{n\times p}$ من الرتبة $n\times p$ فان $(A\times B)^t=B^t\times A^t$

ملاحظة: لتكن المصفوفة $A_{n\times n}$ فانه يقال للمصفوفة التي فيها $A=A^t$ بالمصفوفة المتماثلة Symetric Matrix أما إذا كان $A=-A^t$ فإننا نقول للمصفوفة A بالمصفوفة المتماثلة عكسيا Anti – Symetric Matrix
والان نتناول أمثلة توضيحية لذلك

مثال(1-36): إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}،B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

تحقق من صحة الخاصية $(A+B)^t=A^t+B^t$

الحل:

$$A+B=A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 5 & 2 & 2\end{bmatrix},(A+B)'=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix},B'=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A'+B'=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(A+B)^t=A^t+B^t$ وهو المطلوب

مثال(1-37): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

أثبت ان $(A.B)^t=B^t.A^t$

الحل:

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+16 & 6+20\\ 0+12 & 0+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 26\\ 12 & 15\end{bmatrix}$$

$$(A.B)^t=\begin{bmatrix}14 & 12\\ 36 & 15\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}, A^t=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow B^t.A^t=\begin{bmatrix}-2+16 & 0+12\\ 6+20 & 0+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 12\\ 26 & 15\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(A.B)^t=B^t.A^t$

مثال(1-38): إذا كان لدينا

$$A=\begin{bmatrix}x & 5\\ 1 & y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}29 & 17\\ 17 & 10\end{bmatrix}$$

وعلى اعتبار أن $A.A^t=B$ أوجد قيمة الزوج المرتب(x,y).

الحل:

$$A.A^t=\begin{bmatrix}x & 5\\ 1 & y\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x & 1\\ 5 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+25 & x+5y\\ x+5y & 1+y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & 17\\ 17 & 10\end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتان نستطيع كتابة

$$x^2+25=25\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2\backslash$$

$$1+y^2=10\Rightarrow y^2=9\Rightarrow y=-3$$

$$x+5y=17$$

وهنا وحتى تتحقق المعادلة الأخيرة فان القيم الموجبة لكل من x,y هي التـي فقـط تحقق المعادلة الأخيرة لذا فان الحل هو (2,-3)m هو الحل الوحيد

أمثلة إضافية

مثال(1-39): لدينا المصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

أوجد AC+BC

الحل:

$$AC+BC=(A+B)C=\left(\begin{bmatrix}2&2&3\\3&-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1\\2&3&-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&0\\2&2\\3&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&4\\5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&2\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&0\\12&3\end{bmatrix}$$

مثال(1-40):

لدينا المصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix},C^t=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

أوجد $(A.B).C$،$(A^t.B^t).C^t$

الحل:

$$A.B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1+(-1).(-1)&1.0+(-1).1\\0.1+1.(-1)&0.0+1.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1-\\-1&1\end{bmatrix},$$

$$(C^t)^t=C\Rightarrow C=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$(A.B)C=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$(A^t.B^t).C^t=\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^t.\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^t\right).\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

مثال(1-41):

على اعتبار أن

$$\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x&y\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-2&2\end{bmatrix}$$

أوجد قيمة $x+y$

الحل:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x & y\\0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & y+2y\\-x & -y+3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x & 3y\\-x & 2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-2 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow x=2,3y=3\Rightarrow x=2,y=1$$

$$\Rightarrow x+y=2+1=3$$

مثال(1-42):) لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}10 & 6\\6 & 4\end{bmatrix}.$$

وعلى اعتبار أن $A.A^t=B$ أوجد قيمة

$$\frac{x}{y}$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & y\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1 & 0\\x & y\end{bmatrix}$$

$$A.A^t=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & x\\0 & y\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0\\x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6\\6 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1+x^2 & xy\\xy & y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6\\6 & 4\end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين .

$$1+x^2=10,xy=6,y^2=4$$

وبحل المعادلات نجد أن

$$x=-3,y=-2\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$$

لأننا هنا نأخذ فقط قيم x,y الموجبة أو السالبة حتى تتحقق المعادلة الثالثة

مثال(1-43): بالاستفادة من المتطابقات المثلثية احسب قيمة

$$Cosx\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\\sin x & \cos\end{bmatrix}+Sinx\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\-\cos x & \sin x\end{bmatrix}.$$

الحل:

$$\cos x\begin{bmatrix} Cosx & -Sinx \\ Sinx & Cosx \end{bmatrix} + Sinx\begin{bmatrix} Sinx & Cosx \\ -Cosx & Sinx \end{bmatrix} = A$$

$$A = \begin{bmatrix} Cos^2x & -SinxCosx \\ SinxCosx & Cos^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Sin^2x & Sinx\cos x \\ -Sinx\cos x & Sin^2x \end{bmatrix} S$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Cos^2x + Sin^2x & -SinxCosx + Sinx\cos x \\ Sinx\cos x - Sinx\cos x & Cos^2x + Sin^2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(1-44): احسب قيمة x,y التي تحقق المعادلة التالية

$$x.\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$x\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+3y \\ 5x+0.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x+x+3y \\ 2x+5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3y \\ 7x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow 3y = 6, 7x = 21$$

$$\Rightarrow y = 2, x = 3 \Rightarrow (x, y) = (3,2)$$

تمارين عامة
على الفصل الأول

س1) على اعتبار أن

$$\begin{bmatrix} 2x & y & -z \\ x & -y & 2z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & y \\ -5 & 11 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 4 & -1 \\ z & 5 & 3z \end{bmatrix}$$

أوجد قيمةx+y

س2) إذا كان

$$\begin{bmatrix} a & x \\ -x & 3 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة a.

س3) إذا كان

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمةb + d.

س4) إذا كان

$$x.\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة x+y

س5) أوجد المصفوفة x التي تحقق المعادلة

$$x - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 5 = 0$$

س6) إذا كان

$$2A + B = \begin{bmatrix} a & a & b \\ c & c & c \end{bmatrix}، A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}، B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

أوجد مجموع a+b+c

س7) لدينا المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & 1 \\ 2 & \sin x \end{bmatrix}، B = \begin{bmatrix} \cos x & -1 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}، C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

وعلى اعتبار أن A+B=C أوجد قيمة x.

س8) إذا كان

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$$

أوجد قيمةy-x

س9) لدينا المصفوفات التالية

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}، A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}، B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج ما يلي إن أمكن A.B,B.C,A.C,D.C
مع ذكر سبب عدم الإمكانية.

س10) أوجد قيم x,y التي تحقق العلاقة التالية

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ -2 & 0 & x \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 3 & -x & y \\ 3 & y & -x \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

س11) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة A^5

س12) لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد $A.B^2$

س13) لدينا المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد $A.B+C^2$

س14) لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة C التي تحقق العلاقة A.C=C+B

س15) لدينا المصفوفات التالية

$$A = \begin{bmatrix} x-y & 1 \\ 2 & y-2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x-2 & 6 \\ 3 & 6-y \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وإذا كان $B^t-3A=0$ أوجد قيمة x

س16) لدينا المصفوفات

$$C=\begin{bmatrix}\sqrt{18} & 3.2^{x}\\ \log^{8}{}_{4} & 2\end{bmatrix}$$

أوجد حاصل ضرب x.y والذي يحقق المتساوية A.B=C حيث

$x, y \in R$

س17) لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}Cosx & Sinx & 1\\ Sinx & Cosx & 0\end{bmatrix}،B=\begin{bmatrix}Cosx\\ Sinx\\ -1\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة $(A.B)^{t}$

س18) متتالية حسابية حدودها مصفوفات مربعة من الرتبة 2×2 حدها الثالث

$$a_7=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 7 & -8\end{bmatrix}،a_3=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

أوجد أساس هذه المتتالية

س19) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

وكان أساسها

$$k=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

أوجد الحد الرابع من هذه المتتالية.

س20) لدينا المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}،B=\begin{bmatrix}2\log^{x}{}_{2} & 1\\ 5 & -2\end{bmatrix}،C=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 2y+1 & 14\end{bmatrix}$$

وعلى اعتبار أن 2A-3B = C أوجد قيمة x+y.

أسئلة موضوعية
على الفصل الأول

س1) لدينا المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3&-2\\2&5\end{bmatrix}$$

فان قيمة $A.B+C^2$ هي

$A)\begin{bmatrix}14&8\\16&3\end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix}-2&-8\\24&15\end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix}19&-8\\32&30\end{bmatrix}$

$D)\begin{bmatrix}6&12\\12&6\end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix}19&-7&4\\12&15&12\end{bmatrix}$

س2) لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$$

فان المصفوفة C التي تحقق $A.C=C+B$ هي

$A)\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ $D)\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$

س3) لدينا المصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}x-y&1\\2&y-2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}x-2&6\\3&6-y\end{bmatrix}, 0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

وإذا كان $B^T-3A=0$ فان قيمة x هي

$A)4$ $B)\frac{7}{2}$ $C)3$ $D)\frac{5}{2}$ $E)2$

س4) لدينا المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}$$

فان قيمة $(A.B)^T$ هي

$A)\begin{bmatrix}-3 & 2\end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$

$D)\begin{bmatrix}-2 & 3\end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

س5) لدينا المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}Cosx & Sinx & 1\\ Sinx & Cosx & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}Cosx\\ Sinx\\ -1\end{bmatrix}$$

إن قيمة المصفوفة X التي تحقق العلاقة $A.x^T=B$ هي

$A)\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix}0 & Sin2x\end{bmatrix}$ $D)\begin{bmatrix}Sin2x\\ 0\end{bmatrix}$

$E)\begin{bmatrix}Sin2x & 1\end{bmatrix}$

س6) لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

فذا كان مجموع عناصر المصفوفة A^n يساوي 16 فان قيمة n هي

$A)8$ $B)10$ $C)12$ $D)14$ $E)16$

س7) إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}, A^k=\begin{bmatrix}512 & 0\\ 0 & -512\end{bmatrix}$$

فان قيمة k هي

$A)8$ $B)9$ $C)10$ $D)11$ $E)12$

س8) لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

فان المصفوفة A^{10} هي

$A)2^9.A$ $B)2^{10}A$ $C)2^{18}A$

$D)3^9A$ $E)3^{10}A$

س9) إن رتبة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

هي

$A)4$ $B)3$ $C)2$ $D)1$ $E)0$

س10) حتى تكون رتبة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}x&-2&6\\6&4&-12\end{bmatrix}$$

تساوي 1 فان قيمة x هي

$A)-6$ $B)-3$ $C)-2$ $D)2$ $E)3$

س11) إذا كان

$$y>0,\begin{bmatrix}x&2&0\\3&-1&y\end{bmatrix},A.A'=\begin{bmatrix}5&x\\x&26\end{bmatrix}\Rightarrow x+y=$$

$A)1$ $B)2$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

س12) لدينا

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix},A.X'=B$$

فان قيمة المصفوفةXهي

$A)[-3 \quad 2]$ $B)\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $C)[3 \quad -2]$ $D)[-2 \quad 3]$ $E)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

س12) لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{10} =$$

$A)2^9 A$ $B)2^{10} A$ $C)2^{18} A$ $D)3^9 A$ $E)3^{10} A$

س13) لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, n \in Z^+ \Rightarrow A^{4n+3} =$$

$A)1$ $B)-1$ $C)A$ $D)-A$ $E)2A$

س14) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f(A) =$$

$A)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D)\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

$E)\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

س15) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}، i = \sqrt{-1}$$

فان A^{99} هي

$A)\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$D)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

س16) باستخدام المصفوفات التالية

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

فان نظام المعادلات الناتج هو

$A) \begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$ $B) \begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x - 3y &= -5 \end{aligned}$ $C) \begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$

$D) \begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$ $E) \begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ -x + 3y &= 5 \end{aligned}$

الفصل الثاني
المحددات

الفصل الثاني
المحددات

2-1 اقتران المحدد:

تعريف(2-1): لتكن M هي مجموعة المصفوفات المتكونة من الأعداد الحقيقية فان الاقتران المعرف على النحو التالي $D:M \rightarrow R$
يسمى الاقتران D بمحدد المصفوفة المربعة A وسنرمز للمحدد بالرمز Det A أو $|A|$ كما يمكن التعبير عنها بالصيغة $\Delta(A)$

2-2 حساب المحدد للمصفوفة المربعة

1) إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الأولى على الصورة

$$A = [a] \Rightarrow |A| = a$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - cb$$

2) إن محدد المصفوفة A المربعة من الرتبة الثانية والتي هي على الصورة وهو عبارة عن الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطر الأول بحاصل عناصر القطر الثاني

مثال(2-1): أوجد محدد المصفوفة

$$A = [5]$$

الحل:

$$|A| = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال(2-2): أوجد محدد المصفوفة

الحل:

$$|A| = 1\times 2 - 2\times 3 = 2 - 6 = -4$$

مثال(2-3): أوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \sin x \sin x - (-\cos x)\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

مثال(2-4): أوجد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 101 \\ 102 & 103 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن عناصر المصفوفة المعطاة هي أعدادا حقيقية متتالية وعليه فسنفرض أن العدد $a=100$ وعليه يمكن كتابة المصفوفة على النحو التالي

$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a(a+3) - (a+1)(a+2)$$

$$a^2 + 3a - a^2 - 3a - 2 = -2$$

3) المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد محدد مثل هذا النوع من المصفوفات سنعتمد طريقين هما

a) طريقة المصفوفة المصغرة والتي سنرمز لها بالرمز M_{ij} والناتجة عن تغطية العمود j والصف i الذي يقع فيه العنصر a_{ij} ثم نأخذ محدد المصفوفة المتبقية وكذلك سنرمز للعامل A_{ij} والذي يساوي $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ للعنصر a_{ij}

مثال(2-5): لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد المصفوفة المصغرة وكذلك العامل لكل من الحدود التالية a_{12}, a_{23}, a_{31}

الحل: نجد أولا المصفوفات المصغرة المرتبطة بكل حد من الحدود أعلاه ثم محددها وعواملها على النحو التالي

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (4).(2) - (6).(7) = -34$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (3).(1) - (-1)(7) = 3 + 7 = 10$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1).(6) - (2)(5) = -6 - 10 = -16$$

أما عوامل الحدود المكافئة فهي على النحو التالي

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-34) = (34)$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)(10) = (-10)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1).(-16) = (-16)$$

تعريف(2-2): إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة والتي هي على النحو التالي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ويقال لمحدد المصفوفة

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

بأنه مفكوك بالنسبة للصف الأول وعلى أية حال فانه إذا كان المحدد قد وجد من المفكوك حسب أي صف أو أي عمود فلا اختلاف في النتيجة. وبشكل عام فان

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

أو

$$\det A = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$$

ملاحظة: لأي مصفوفة من الرتبة الثالثة فان إشارة العوامل (العناصر المرافقة) عند حساب محددها سواء كان المفكوك حسب سطر معين أو عمود معين يمكن الاستعانة بالجدول (2-1)

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

جدول(2-1)

مثال(2-6): احسب محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل: سنحل المفكوك حسب الصف الثالث وسنستعين بجدول الإشارات أعلاه (2-1) ليكون المحدد على النحو

$$|A| = (4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 4(2-9) - 5((1)(1) - (-2)(3)) + (-2)((1)(3) - (-2)(2))$$
$$= -28 - 35 - 14 = -77$$

مثال(2-7): أوجد محدد المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: نحاول عند اختيار الصف أو العمود الذي سنأخذ المفكوك بالنسبة له بان يحتوي على أكبر عدد من الأصفار وهنا سنأخذ العمود الثالث لاحتوائه على صفرين مما يسهل العملية الحسابية وعليه فان

محدد المصفوفة B

$$\det(B)=|B|=(-2)\begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}=(-2)((7)(5)-(4)(6))=(-2)(35-24)$$

$$(-2)(11)=-22$$

والآن نستطيع أن نعطي صورة أعم لهذه الطريقة وهي حساب محدد مصفوفة مربعة من الرتبة النونية فإذا كان لدينا المصفوفة

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n}\\ ..... & ..... & ..... & .....\\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn}\end{bmatrix}$$

فان محدد المصفوفة إذا كان المفكوك بالنسبة لأي سطر هو

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...........+a_{in}A_{in}$$

أما إذا كان المفكوك بالنسبة لأي عمود فان

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...........+a_{nj}A_{nj}$$

مثال(2-8): أوجد محدد المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ -4 & 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

الحل: نظرا لصعوبة الإجراءات الحسابية وخاصة كلما زادت الرتبة لذا نبدأ بالبحث عن الصف أو العمود الأكثر أصفارا ويعمل المفكوك على أساسه وفي مثالنا سنعمل المفكوك على أساس الصف الثالث على النحو التالي

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ -4 & 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}.3.\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+2}.(0).\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(0).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 3(2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+0 + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}) = 3(2(3+6) - 2(-9+8) + 0)$$

$$+0+0-3(2(2+6)+0-2(2+8))$$

$$60-48+20=32$$

b) **قاعدة ساروس:** وهي طريقة أخرى لإيجاد محدد المصفوفة أيا كانت رتبتها .
وسنبدأ هذه الطريقة بالمصفوفة ذات الرتبة الثالثة. والتي هي على الصورة

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب هذه القاعدة فإننا

(1) نضيف أول صفين إلى أسفل المحدد للمصفوفة الأصلية أو أول عمودين إلى يمين محدد المصفوفة الأصلية.

(2) نرسل أسهم تمر عبر العناصر القطرية من أقصى الزاوية اليسرى وهذه الأسهم تكون متوازية لنأخذ حواصل الضرب للعناصر الواقعة على هذه الأسهم ونشير بإشارة موجب(+) لكل نهاية سهم.

(3) نرسل بالمثل أسهم من أقصى الزاوية اليمنى ونضع في نهاية كل سهم إشارة (-)

(4) a) نبدأ بإضافة الصفوف ويكون محدد المصفوفة

وعليه يكون محدد المصفوفة

$$[A] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

أما إذا أضيفت الأعمدة فيكون الشكل بعد الإضافة على النحو التالي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$[A] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال(2-9): إذا كان لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأوجد محدد هذه المصفوفة بطريقة ساروس بإضافة الأعمدة

الحل:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$= (6 + 18 + 2) - (9 + 3 + 8) = 26 - 20 = 6$$

مثال(2-10): إذا كانت المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد محدد المصفوفة

الحل يترك للقارئ كتمرين.

2-3 خصائص المحددات

1) إذا كان لدينا مصفوفة مربعة A من الرتبة n فان

$$|A| = |A'|$$

مثال(2-11): إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$|A| = |A'|$$

الحل: إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فان

$$|A| = 1(-1) - 2(3) = -7$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow At = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A'| = 1(-1) - 2(3) = -7$$

نلاحظ من أعلاه أن

$$|A| = |A'|$$

وهو المطلوب.

2) إذا كان أحد صفوف مصفوفة مربعة أو أحد أعمدتها صفرا فان محدد هذه المصفوفة صفرا

مثال(2-12): لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 33 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 80 & -10 & 41 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$|A| = 0$$

الحل:

$$|A| = 0.\begin{bmatrix} 33 & -12 \\ -10 & 41 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 17 & -12 \\ 80 & 40 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 17 & 33 \\ 80 & -10 \end{bmatrix} = 0$$

وهو المطلوب

3) إذا استبدل صف بصف آخر أو عمود بعمود آخر من أعمدة مصفوفة مربعة فان محدد المصفوفة الناتجة بعد عملية الاستبدال مساوية لمحدد المصفوفة الأصلية عدديا ومخالف له بالإشارة.

مثال(2-13): إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$|A| = -|B|$$

حيث B هي المصفوفة بعدتبديل صفان أو عمودان لمواقعهما

الحل: نجد أولا

$$|A|$$

ثم

$$|B|$$

على النحو

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2(4) - 3(-1) = 8 + 3 = 11$$

$$|B| = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3 - 8 = -11$$

نلاحظ أعلاه أن

$$|A| = -|B|$$

وهو المطلوب.

4) في أي مصفوفة مربعة إذا كان بها صفان أو عمودان متشابهان فان محدد المصفوفة المربعة يساوي صفرا.

مثال(2-14): إذا كان

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

فان

$$|A| = ab - ab = 0$$

5) إذا كان لدينا مصفوفة مربعة وضرب أحد صفوف أو أعمدة هذه المصفوفة في عدد $k \in R$ فان محدد المصفوفة بعد عملية الضرب يساوي محدد المصفوفة الأصلية مضروبا في العدد $k \in R$

مثال(2-15): إذا كان

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

الحل:

الطرف الأيسر

$$ka(d) - c(kb) = kad - ckb$$

الطرف الأيمن

$$k(ad - cd) = kad - kcb$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن=الطرف الأيسر.

6) إذا كان هناك نسبة ثابتة بين صفي مصفوفة مربعة أو عمودي المصفوفة فأن محدد هذه المصفوفة صفرا.

وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هناك نسبة ثابتة بين عناصر الصفين

$$\frac{a}{ka} = \frac{b}{kb} = \frac{1}{k}$$

ولاثبات هذه الخاصية نأخذ محدد المصفوفة A أي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = akb - akb = 0$$

مثال(2-16): أوجد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل: لو نظرنا إلى العمود الأول والعمود الثالث للاحظنا أن هناك نسبة ثابتة بين عناصر العمود الأول وعناصر العمود الثالث على النحو:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

وحسب الخاصية ،فان محدد المصفوفة A هو الصفر

7) إذا كان لدينا المصفوفتين A,B من الرتبة n فان

$$|AB| = |A|.|B|, |A^n| = |A|^n$$

مثال(2-17): لدينا المصفوفتين
اثبت صحة العلاقة أعلاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A| = 4 - 6 = -2, |B| = 4 + 1 = 5, |A|.|B| = (-2)(5 = -10 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, |A.B| = 20 - 30 = -10 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نلاحظ من(1),(2) أن

$$|A.B| = |A|.|B|$$

وكذلك

$$|A^3| = (|A|)^3 = (-2)^3 = -8$$

(8) في محددة مصفوفة A إذا كان أي عنصر من عناصر صف أو عمود مكون من مجموع عددين فأن محددة هذه المصفوفة تكون عبارة عن
مجموع محددتين من نفس الرتبة وبصيغة الرموز

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c & d \end{vmatrix} = (a_1+a_2)d-(b_1+b_2)c$$

$$= (a_1d-b_1c)+(a_2d-bc)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{Vmatrix}$$

مثال (2-18): لدينا
والمطلوب هو إيجاد قيمة P .

$$\begin{vmatrix} 12 & P & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

الحل: سبق وان تناولنا خاصية وهي انه إذا كان بين عمودين في مصفوفة مربعة تناسبا ثابتا بين العمودين فأن محدد المصفوفة صفرا أو بالاستفادة من هذه الخاصية فأننا نضع هذا التناسب بين العمود الأول والثاني.

$$\frac{p}{12} = \frac{-1}{3} = \frac{2}{-6} \Rightarrow \frac{p}{12} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3P = -12 \Rightarrow P = -4$$

$$\begin{vmatrix} Cos\frac{x}{2} & Sin\frac{x}{2} \\ Sinx & Cosx \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}$$

مثال (2-19): لدينا
أوجد اصغر قيمة للزاوية x.

الحل: نبدأ بإيجاد محدد المصفوفة ومساواته بالقيمة-0.5 على النحو:

$$CosxCos\frac{x}{2} - SinxSin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow Cos\left(x + \frac{x}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$= Cos120 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{120}{1} \Rightarrow 3x = 240 \Rightarrow x = 80$$

مثال(2-20) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

احسب:

$$|A^6|$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = -5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: نعلم أن A^2 A.A و عليه فأن:
ولذا فان

$$|A^6| = |(A^2)^3| = |A|^6 = (-5)^6 = 5^6$$

مثال(2-21) أوجد

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

الحل: قبل إجراء عملية المفكوك لإيجاد المحدد نعمل على تبسيط المصفوفة وذلك بطرح الصف الأول من الصف الثاني ومرة من الصف الثالث لتصبح المحددة على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{vmatrix}$$

ونأخذ المفكوك حسب العمود الأول.

$$= a\begin{vmatrix} b-a & b-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = a((b-a)(c-a)-(b-a)(b-a)) = a(b-a)(c-b).$$

مثال(2-22) لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد مرافق العنصر a_{12} في المحدد

$$|A'.A|$$

الحل: نجد أولا

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وعليه فان

$$A'.A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ومرافق العنصر a_{12} من

$$|A'.A| \Rightarrow (-1)^{1+2}.M_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(2) = -2$$

مثال (2-23): أوجد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: نحاول أولا أن نبسط المصفوفة إلى صورة ابسط حتى نبسط العمليات الحسابية في إيجاد محدد المصفوفة. وذلك بجمع الصف الأول مع الصف الثاني وكذلك الصف الأول مع الصف الثالث ثم بعد ذلك نأخذ المفكوك بالنسبة للعمود الرابع لنحصل على ما يلي:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&2&-1\\3&2&5&0\\0&5&3&0\\6&1&2&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}3&2&5\\0&5&3\\6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&5\\0&5&3\\6&1&2\end{vmatrix}$$

ثم نعمل على تبسيط المصفوفة الأخيرة لإيجاد محددها وذلك بضرب الصف الأول في 2- وإضافته إلى الصف الثالث لتصبح المصفوفة على النحو:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&5\\0&5&3\\0&-3&-8\end{vmatrix}=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&3\\-3&-8\end{vmatrix}=3(-40+9)=-93$$

أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix}x^2&x&1\\4&2&1\\9&-3&1\end{vmatrix}=0$$

الحل: نبدأ بعملية التبسيط قبل إيجاد محدد المصفوفة وذلك بطرح الصف الثالث من الصف الأول وكذلك بطرح الصف الثالث من الصف الثاني ثم نقوم بعمل المفكوك وفق العمود الثالث لنحصل على التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix}x^2&x&1\\4&2&1\\9&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2-9&x+3&0\\4-9&2+3&0\\9&-3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x^2-9&x+3&0\\-5&5&0\\9&-3&1\end{vmatrix}$$

$$=1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}x^2-9&x+3\\-5&5\end{vmatrix}=0\Rightarrow 5(x^2-9)+5(x+3)=0\Rightarrow x^2-9+x+3=0$$

$$\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x+3=0, x-2=0$$

$$\Rightarrow x=-3, x=2$$

$$\{-3,2\}$$

مثال(2-24): أوجد محدد المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{bmatrix}$$

الحل: نعمل على تبسيط المصفوفة المربعة حتى يسهل أخذ المحدد وذلك بطرح العمود الأول من العمود الثاني وكذلك العمود الأول من العمود الثالث لنحصل على مصفوفة ثم نأخذ المفكوك بالنسبة للصف الأول على النحو التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c^3-a^3)-(c-a)(b^3-a$$

$$=(b-a)(c-a)(c^2+ac+a^2)-(c-a)(b-a)(b^2+ab+a^2)$$

$$=(b-a)(c-a)(c^2+ac+a^2-b^2-ab-a^2)$$

$$=(b-a)(c-a)\left[c^2-b^2+a(c-b)\right]$$

$$=(b-a)(c-a)\left[(c-b)(c+b)+a(c-b)\right]$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a)$$

مثال(2-25) إذا كانت

$$B=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}$$

أوجد:

$$|A.B|$$

الحل:

$$|B|=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=\sin x\cos x-(-\sin x)\cos x$$

$$=\sin x\cos x+\sin x\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$|A.B|=|A|.|B|=\cos 2x\sin 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

2-4 المصفوفة المصاحبة (Adjoint Matrix)

تعريف(2-3): يقال للمصفوفة الناشئة من مدور مصفوفة المرافقات بالمصفوفة المصاحبة والتي سنرمز لها بالرمز Adj (A) وعليه

فان $Adj(A)=(A_{ij})^{t}_{nxn}$

ولتوضيح هذا المفهوم نتناول المثال التالي:

مثال(2-26): أوجد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 6 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

الحل: نبدأ بإيجاد مرافق كل عنصر على النحو التالي:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=(+6)(-3)-0=-18$$

$$A_{12}=(-1)_{1+2}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-(-15-2)=17$$

$$A_{13}=(-1)_{1+3}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(0-6)=-6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-(6-0)=-6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9-1=-10$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(+2)=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=(-4-6)=-10$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-(6-5)=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 6\end{vmatrix}=(18+10)=28$$

وعليه فان مصفوفة المرافقات

$$A=\begin{bmatrix}-18 & 17 & -6\\ -6 & -10 & -2\\ -10 & -1 & 28\end{bmatrix}$$

2-5 نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب .

نبدا توضيح هذا المفهوم والهام في نظرية المصفوفات بالتعريف التالي:

تعريف(2-4): لتكن لدينا A مربعة من الرتبة n وإذا وجد مصفوفة مربعة من الرتبة n مثل B وتحقق الشرط التالي $A.B=B.A=I_n$
فإننا نسمي المصفوفة B بأنها المصفوفة النظيرة بالنسبة لعملية الضرب وسنرمز لها أيضا بالرمز A^{-1}.

ملاحظة: حتى يكون للمصفوفة المربعة مصفوفة نظيرة بالنسبة لعملية الضرب فانه يتوجب أن يكون محددها لا يساوي صفرا.

2-5-1 خصائص المصفوفة النظيرة .

1) إذا كانت A مصفوفة مربعة فان

$$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$$

2) نظير المصفوفة النظيرة هي المصفوفة الأصلية

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

3) نظير مبدول المصفوفة=مبدول نظير المصفوفة

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

4) إذا كان لدينا المصفوفتين المربعتين A,B من الرتبة n فان

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

5) إذا كان لدينا A مصفوفة مربعة من الرتبة n

$$\forall k \in R \Rightarrow (kA)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1}$$

6) إذا كان لدينا A مصفوفة مربعة فان

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

7) إذا كانت A مصفوفة مربعة فان

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

مثال(2-27): أوجد نظير المصفوفة المربعة الضربي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نفرض أن المصفوفة النظيرة بالنسبة لعملية الضرب

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A.B = BA = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a = -2, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = \frac{-1}{2}$$

وبحيث تحقق الشرط الوارد في التعريف (10-1) أي
ومن تساوي المصفوفتين فإننا نكتب نظام المعادلات التالية:

$$a + 2c =, b + 2d = 0$$
$$3a + 4c = 0, 3b + 4d = 0$$

وبحل هذه الأنظمة نجد أن

وعليه فان المصفوفة النظيرة للمصفوفة A بالنسبة لعملية الضرب هي

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مثال(2-28): أوجد المصفوفة النظيرة للمصفوفة Aبالنسبة لعملية الضرب ،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نجد محدد المصفوفةA على النحو

$$|A| = (4)(1) - (-2)(-2) = 4 - 4 = 0$$

ويكون محدد المصفوفةA يساوي صفرا فان هذه المصفوفة ليس لها مصفوفة نظيرة.

2-5-2 إيجاد المصفوفة النظيرة لأي مصفوفة باستخدام المصفوفة المصاحبة .

قاعدة: إذا كان Aمصفوفة مربعة من الرتبةn ،ولكون

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A(adjA) = |A|.In, A(\frac{1}{1A1}adjA) = \frac{1}{1A1}.(AadjA)$$

$$= \frac{1}{1A1}(1A1I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1A1}.adjA$$

.ويمكن تلخيص القاعدة أعلاه بالخطوات التالية:

1) نجد المحدد A فإذا كان

$$|A| \neq 0$$

فلها مصفوفة نظيرة

2) نجد مصفوفة المرافقات .

3) نجد مبدول مصفوفة المرافقات لنحصل على مصفوقة المصاحبات والتي سنرمز لها بالرمز adjA

4) نجد المصفوفة النظيرة A^{-1} من العلاقة

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}.adjA}$$

مثال(2-29): على اعتبار أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ،a\ ,b \in R - \{5\}$$

أوجد نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب.

الحل: لتكن المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix}.$$

هي المصفوفة النظيرة للمصفوفة A. ومن كون A.B=BA=I فان

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y & z \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + ac + bf & y + ad + bg & z + ae + bh \\ c + af & d + ag & e + ah \\ f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين

$$\Rightarrow x + ac + bf + 1, y + ad + bg = 0, z + ae + bh = 0$$

$$c + af = 0, d + ag = 1, e + ah = 0$$

$$\Rightarrow f = 0, g = 0, h = 1$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات أعلاه وبحل نظام المعادلات

$$x = 1, y = 0a, z = a^2 - b, c = 0, d = 1,$$
$$e = -a, f = 0, g = 0, h = 1$$

وعليه فان نظير المصفوفة A الضربي هو

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 - b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفزفة مربعة من الرتبة الثانية

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ، |A| = ad - bc \neq 0$$

فان:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

وهنا مصفوفة البسط ما هي إلا المصفوفة المصاحبة والناتجة من تبديل مواقع عناصر القطر الأيسر(الرئيسي) مع تغير إشارة عناصر القطر الأيمن(القطر الثانوي).

مثال(2-30): أوجد المصفوفة النظيرة بالنسبة لعملية الضرب للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل: نجد أولا محدد المصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (3)(-2) = 4$$

وباستخدام العلاقة أعلاه فان

$$A^{-1}\frac{[adjA]}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix}}{4}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{4} & \frac{2}{4}\\ \frac{-3}{4} & \frac{2}{4}\end{bmatrix}$$

مثال(2-31): أوجد المصفوفة النظيرة بالنسبة عملية الضرب للمصفوفة A

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

الحل: 1) نجد محدد المصفوفة A على النحو التالي

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 4 & 2 & 5\\ -3 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}4 & 5\\ -3 & -1\end{vmatrix}5\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 3\end{vmatrix}$$

$$=1(-2-15)-4(-4+15)+5(12+6)$$

$$=-17-44+90=29$$

3) نجد مرافقات كل عناصر المصفوفة الأصلية.

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=+(-2-15)=-17$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 5\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-(-4+15)=-11$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 3\end{vmatrix}=-(12+6)=18$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-4-5)-19$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & -1\end{vmatrix}=+(-1+15)=14$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -3 & 3\end{vmatrix}=-(3+12)=-15$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}4 & 5\\ 2 & 5\end{vmatrix}=+(20-10)=10$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-(5-20)=-(-15)=15$$

$$A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}=+(2-16)=-14$$

نكتب مصفوفة المرافقات

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix}-17 & -11 & 18\\ 19 & 14 & -15\\ 10 & 15 & -14\end{bmatrix}$$

نجد المصفوفة المصاحبة

$$adjA=[A_{ij}]^t$$

$$=\begin{bmatrix}-17 & 19 & 10\\ -11 & 14 & 15\\ 18 & -15 & -14\end{bmatrix}$$

وعليه فان المصفوفة النظيرة هي

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{1}{29}.=\begin{bmatrix}-17 & 19 & 10\\ -11 & 14 & 15\\ 18 & -15 & -14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-17}{29} & \frac{19}{29} & \frac{10}{29}\\ \frac{-11}{29} & \frac{14}{29} & \frac{15}{29}\\ \frac{18}{29} & \frac{-15}{29} & \frac{-14}{29}\end{bmatrix}$$

مثال(2-32) لدينا المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة C بحيث Ac=B

الحل: نبدأ بوضع المعطيات $A.c^{-1}=B$

ثم نقوم بضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة النظيرة A^{-1}

$$A^{-1}(A.c^{-1}) = A^{-1}.B \Rightarrow (A^{-1}.A).c^{-1} = A^{-1}.B \Rightarrow I.c^{-1} = A^{-1}.B$$
$$\Rightarrow c^{-1} = A^{-1}.B$$

ثم نأخذ النظير الضربي لكلا الطرفين

$$(c^{-1})^{-1} = (A^{-1}.B)^{-1} \Rightarrow C = B^{-1}.(A^{-1})^{-1} \Rightarrow C = B^{-1}.A$$

وعليه نجد أولا النظير الضربي للمصفوفة B .

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبهذا يمكن إيجاد المصفوفة C على النحو

$$C = B^{-1}.A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال(2-33): لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ -4 & b \end{bmatrix}$$

وان نظيرها الضربي هو نفسها أوجد $a.b$

الحل: من المعطيات نلاحظ أن $A^{-1}=A$

وبضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة A

$$(A.A^{-1}) = A.A \Rightarrow I = A.A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -4 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ -4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2-8 & 2a+2b \\ -4a-4b & b^2-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين

$$a^2 - 8 = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = -3$$
$$b^2 - 8 = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

وعليه فان $(a=3,b=-3)$ أو $(a=-3,b=3)$ ومنه $a.b=-9$

2-6 المصفوفة المنفردة وغير المنفردة(and non singular matrix singular)

تعريف(2-5): تسمى المصفوفة المربعة A من الرتبة n مصفوفة منفردة إذا كان

$$\det A = |A| = 0$$

أما إذا كان

$$\det A = |A| \neq 0$$

فان المصفوفة تكون مصفوفة غير منفردة.

مثال(2-34): لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

فهل المصفوفة A مصفوفة منفردة.

الحل: نجد محدد المصفوفة A على النحو التالي

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = ((2)(4) - (3)(5)) = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

فالمصفوفة A غير منفردة.

مثال(2-35): لدينا المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

فهل المصفوفة B منفردة؟

الحل: المصفوفة B منفردة لان محددها يساوي الصفر حيث أن الصف الأول والثالث في المصفوفة متشابهان.

2-7 المصفوفة المحتواة(sub matrix)

تعريف(2-6): لتكن المصفوفة A من الرتبة mxn فنسمي المصفوفة نفسها او التي حذف بعض سطور أو أعمدة منها والناتجة بعد عملية الحذف بالمصفوفة الجزئية أو المحتواة.

مثال(2-36): لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 6 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

كون مصفوفتين جزئيتين لهذه المصفوفة.

الحل: المصفوفة الناتجة من حذف السطر الرابع من المصفوفة الأصلية.

2-8 درجة المصفوفة(the rank of a matrix)

تعريف(2-7): يقال لرتبة المصفوفة المربعة غير المنفردة والتي هي محتواه في المصفوفةA على أنها درجة المصفوفة.

ملاحظة:1) إذا كان لدينا المصفوفة A من الرتبةnxn مصفوفة مربعة وإذا كان A≠0 فان درجة المصفوفة rank(A)=n .

1) إذا كانت المصفوفةA من الرتبةnxm فان درجة المصفوفة

$rank(A)\le \min(m,n)$

مثال(2-37): لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

أوجد درجة هذه المصفوفة

الحل:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=(1)(2)-(3)(4)=2-12=-10\neq 0$$

∴ درجة المصفوفة A هي 2.

مثال(2-38): أوجد درجة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

الحل: نجد أولا محدد المصفوفة المعطاة أي

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 3(3-2) + 3(1-2) = 3 - 3 = 0$$

∴ درجة المصفوفة $rank(A) < 3$

نختار مصفوفة مربعة رتبتها 2×2 من المصفوفة A ثم نجد محددها فإذا اختلف عن الصفر فان درجة المصفوفة يتحدد فلتكن هذه المصفوفة

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

∴ فدرجة المصفوفة A من الدرجة الثانية.

مثال(2-39): لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3x4}$$

الحل: لكون المصفوفة من الرتبة 3×4 فان درجة المصفوفة

$$rank(A) \leq 3$$

نختار مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ولتكن

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وعليه فان محدد هذه المصفوفة على النحو التالي:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-2) - 2(2-6) + 5(2+3) = -3 + 8 + 25 = 30 \neq 0$$

∴ درجة المصفوفة من الدرجة الثالثة.

مثال(2-40): إذا كانت درجة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} a+3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تساوي 2 فأوجد قيمة a.

الحل: لان درجة المصفوفة 2 معنى ذلك ولكونها من الرتبة الثالثة فان محدد المصفوفة من هذه الرتبة يساوي الصفر وعليه لو أخذنا المفكوك بالنسبة للصف الثالث فان

$$\begin{vmatrix} a+3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} a+3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4(a+3)+2) = 0$$

$$\Rightarrow 4a+12+2=0 \Rightarrow 4a=-14 \Rightarrow a=\frac{-14}{4}=\frac{-7}{2}$$

2-9 المصفوفات ونظم المعادلات الخطية matrices and linear equation systems.

تعريف(2-8): على اعتبار أن

$$m\in N^{+}, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n \in R, a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{in} \in R$$

فنسمي النظام الناتج من m معادلة من النوع

$$a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_1=b_1$$

والمحتوي على n مجهول والذي هو على النحو التالي

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

بنظام المعادلات الخطية والمتكون من m معادلة

ونسمي $a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}$ بعاملات المعادلة الثابتة أما $x_1,x_2,\ldots,x_n$ فنسميها مجاهيل المعادلة. وعندما نتحدث عن حل النظام نعني بذلك إيجاد قيم المجاهيل في النظام S . وقبل التفكير بحل النظام دعنا نتعرف على المصفوفات

1) مصفوفة الثوابت: وهي معاملات المجاهيل في كل معادلة وتكتب على شكل مصفوفة على النحو التالي

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2) مصفوفة الثوابت وهي عناصر الطرف الأيمن والتي سنرمز لها بالرمز B حيث

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

3) نكون مصفوفة المعاملات والثوابت على النحو التالي

$$[A|B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

4) نضع النظام S على صورة يمكن معها حل هذا النظام على النحو

$$AX=B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

مثال(2-41): لدينا نظام المصفوفات التالية

$$S: 3x_1 - 5x_2 = 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$4x_1 - 5x_2 - x_3 = 2$$

والمطلوب: 1) كتابة مصفوفة المعاملات cofficient Matrix

2) مصفوفة الثوابت constants Matrix

3) مصفوفة المعاملات والثوابت coefficients constants Matrix and

5) مصفوفة المجاهيل Unknown Matrix

تعريف(2-9): إذا أجريت للمصفوفة A عدة عمليات صفية فان المصفوفة الناتجة B هي مصفوفة مكافئة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $A \cong B$.
وتكون درجة المصفوفتان المتكافئتان متساويتان.

مثال(2-42): باستخدام العمليات الصفية حل نظام المعادلات التالية

$$(S)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \ldots\ldots\ldots (E_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14 \ldots\ldots\ldots (E_2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \ldots\ldots\ldots (E_3) \end{cases}$$

نجري عمليات الصف التالية لنحصل على النظام المكافئ التالي S_1 وذلك

$$E_2 \to E_2 + (-2)E_1, E_3 \to E_3 + (-3)E_1$$

لنحصل على النظام $S \to S_1$

$$(S_1):\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \ldots\ldots\ldots (E_1) \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \ldots\ldots\ldots (E_2) \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \ldots\ldots\ldots (E_3) \end{cases}$$

وبإجراء العملية الصفية التالية على النظام S_1 نحصل على النظام المكافئ S_2 والعملية هي

$$E_3 = \left(\frac{-1}{5}\right)E_3$$

والنظام المكافئ هو

$$(S_2):\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \ldots\ldots\ldots (E_1) \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \ldots\ldots\ldots (E_2) \\ x_2 + 2x_3 = 4 \ldots\ldots\ldots (E_3) \end{cases}$$

وبتبديل الصف الثاني بالصف الثالث نحصل على نظام مكافئ للنظام S_2 وهو S_3 أي $E_2 \leftrightarrow E_3$ ينتج أن

$$(S_3):\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6..........(E_1)\\ x_2+2x_3=4..........(E_2)\\ -7x_2+4x_3=2..........(E_3)\end{cases}$$

وإذا ما طبقنا العملية الصفية التالية $E_3 \rightarrow E_3+7E_2$ نحصل على النظام المكافئ للنظام S_3

$$(S_4):\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6..........(E_1)\\ x_2+2x_3=4..........(E_2)\\ 10x_3=30..........(E_3)\end{cases}$$

وبإجراء العملية الصفية التالية

$$E_3 \rightarrow \frac{1}{10}E_3$$

نحصل على النظام S_5 المكافئ للنظام S_4

$$(S_5):\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6..........(E_1)\\ x_2+2x_3=4..........(E_2)\\ x_3=3..........(E_3)\end{cases}$$

نلاحظ من النظام الأخير أنه تكون نظام معادلات على شكل مثلث وينتج أن $x_3=3$ وبالتعويض في E_2 عن x_3 بالقيمة 3 ينتج أن $x_2=-2$ وبالتعويض عن x_3،x_2 في معادلة E_1 ينتج أن $x_1=1$

الحل: 1) مصفوفة المعاملات

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

2) مصفوفة الثوابت

$$B=\begin{bmatrix} 7\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

1) مصفوفة المعاملات والثوابت

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & -5 & 0 & 7\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 4 & -5 & -1 & 2\end{array}\right]$$

2) مصفوفة المجاهيل

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2-10 طرق حل أنظمة المعادلات الخطية .

a) طريقة الصف البسيط لحل أنظمة المعادلات الخطية

تتمثل هذه الطريقة بالخطوات التالية

- ليكن E_j ، E_i ، $i \neq j$ هو ترتيب لمعادلات مختلفة من النظام S فيمكن تبديل موقع معادلة بمعادلة أخرى وهذه العملية نوضحها بالعلاقة

$E_i \leftrightarrow E_j$

- يمكن ضرب أي معادلة بعدد حقيقي k بحيث أن

$k \in R-\{0\}$

ونوضح هذه العملية على النحو $E_i \rightarrow kE_i$

- ضرب أي معادلة E_I بعدد $k \in R-\{0\}$ وإضافة ناتج الضرب إلى معادلة أخرى بحيث تتأثر المعادلة المضاف إليها ولا تتأثر المعادلة المضروبة ويمكن تمثيل هذه العملية على النحو $E_i \rightarrow E_i+k_j$

ملاحظة: يمكن تطبيق الخطوة الثانية والثالثة كل على حدى لعمليتين منفصلتين

تعريف(2-10): يقال لنظم المعادلات الخطية S_2 والناتج من إجراء عمليات منتهية على S_1 بأنه نظام مكافئ للنظام S_1 وتكتب على الصورة $S_1 \cong S_2$

إن مجموعة حل كل نظام من المعادلات الخطية متساوية وعليه إذا حصلنا على حل للنظام S_2 بعد عمليات صفية متكافئة فان هذا الحل يعتبر حل للنظام S_1 المكافئ له أيضا.

وفلسفة هذه الطريقة تقوم على البدء بمصفوفة المعاملات والثوابت لنعتبره نظام معادلات أولي S_1

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام طريقة كريمر

1) حل نظام المعادلات الخطية بمجهولين

A) إذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات

نبدأ بالأنظمة ذات المجهولين وبمعادلتين على النحو التالي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

لنرمز لمحدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

كذلك لنرمز لمحدد المتغير x_1 بالرمز Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

وعليه يمكن كتابة النظام أعلاه على النحو

$$\Delta x_1 = \Delta_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$
$$\Delta x_2 = \Delta_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ويسمى هذا الحل بطريقة كريمر لحل المعادلات وتكون مجموعة الحل

$$\left\{ \frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \right\}$$

ملاحظة: 1) إذا كان $\Delta \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد لنظام المعادلات أي أن الحل هو نقطة تقاطع الخطين الممثلين لكل معادلة

2) إذا كان $\Delta = 0$ وكان على الأقل أحد Δ_1،Δ_2 يختلف ع الصفر فانه لا يوجد حل لهذا النظام ومعنى ذلك أن الخطين الممثلان لكل معادلة متوازيان.

3) أما إذا كان $\Delta = 0, \Delta_1 = \Delta_2 = 0$
فانه يوجد عدد لانهائي لهذا النظام.

مثال(2-43): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية

$$3x_1 - x_2 = -1$$
$$4x_1 + 2x_2 = 7$$

الحل: نجد أولا محددة مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.3 - (-1).4 = 10 \neq 0.$$

ولكون $\Delta \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد لهذا النظام ثم نجد

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -1.2 - 7(-1) = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4(-1) = 25$$

وعليه فان

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

ويكون حل هذا النظام

$$(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$$

مثال(2-44): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية ثم أوجد مجموعة الحل

$$x_1 - 3x_2 = -7$$
$$2x_1 - 6x_2 = 7$$

الحل: نجد محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 1.(-6) - (-3).2 = 0$$

لذا فإما أن لا يكون للنظام حل أو عدد لانهائي من الحلول.

وعليه فإننا نجد Δ_1, Δ_2

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = (-7).(-6) - (-3).7 = 63 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1.7 - (-7).2 = 21 \neq 0$$

لذا فان النظام ليس له حل وتكون مجموعة الحل $= \phi$

B) إذا كان عدد المجاهيل لا يساوي عدد المعادلات فإذا كان

1) عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فان للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

2) في حالة ما إذا كان عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات فإننا نأخذ عدد من المجاهيل مساو لعدد المعادلات وبحل النظام فإذا كانت مجموعة الحل تحقق باقي المعادلات فان الحل يكون وحيدا أما إذا لم تحقق فلا يوجد حل لهذا النظام.

مثال(2-45): أوجد مجموعة حل نظام المعادلات التالية

$$2x-4y=6$$

الحل:

$$t\in R, y=t \Rightarrow 4x-4t=6$$
$$\Rightarrow x=2t+3$$

وعليه فان النظام له مجموعة حل لا نهائي=

$$\{(2t+3,t):t\in R\}$$

مثال(2-46): حل نظام المعادلات التالية

$$x+2y=-4$$
$$5x+3y=1$$
$$2x-y=7$$

نأخذ النظام المكون من أول معادلتين لان عدد المجاهيل مجهولين

$$x+2y=-4$$
$$5x+3y=1$$

ثم نبدأ بحل هذا النظام بالطرق السابقة وذلك بإيجاد

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3-10=-7$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-12-2=-14$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1+20=21$$

وعليه فان

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2$$
$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{21}{-7}=-3$$

وبالتعويض عن قيم x,y في المعادلة الثالثة

$$2(2)-(-3)=7$$
$$7=7$$

وبما أن مجموعة الحل الناتجة حققت المعادلة الثالثة

∴ مجموعة الحل للنظام هي $\{(2,-3)\}$.

2) حل نظام المعادلات الخطية ذات الثلاثة مجاهيل

ليكن لدينا نظام المعادلات التالية

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

لحل مثل هذا النظام نجد وكما سبق محددات كل من مصفوفة المعاملات ومحددات كل من المتغيرات x_1,x_2,x_3 وذلك على النحو التالي

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

وهناك ثلاث احتمالات

1) إذا كانت $\Delta\neq0$ فان الحل الوحيد لهذا النظام هو

$$\left\{(x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta})\right\}$$

2) إذا كانت $\Delta=0$ وكان أحد $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ يختلف عن الصفر فانه لا يوجد حل لهذا النظام.

3) إذا كان $\Delta=0,\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$
فان للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

مثال(2-47): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية

$$x-y+6z=-15$$
$$3y-2z=18$$
$$5x+2z=-8$$

الحل: نجد المحددات $\Delta,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ على النحو التالي

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 6\\ 0 & 3 & -2\\ 5 & 0 & 2\end{vmatrix}=74\neq 0$$

وعليه فان للنظام حل وحيد ولذا نجد محددات المتغيرات

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}15 & -1 & 6\\ 18 & 3 & -2\\ 5 & 0 & 2\end{vmatrix}=-74$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -15 & 6\\ 0 & 18 & -2\\ 5 & -8 & 2\end{vmatrix}=-370$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -15\\ 0 & 3 & 18\\ 5 & 0 & -8\end{vmatrix}$$

وعليه يكون الحل الوحيد هو

$$(x,y,z)=(\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\Delta_2}{\Delta},\frac{\Delta_3}{\Delta})$$
$$=(\frac{-74}{-74},\frac{-370}{-74},\frac{111}{-74})=(1,6,\frac{-3}{2})$$

مثال(2-48): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية

$$2x-y+z=4$$
$$x+3y+2y=12$$
$$3x+2y+3z=16$$

ثم أوجد مجموعة الحل.

الحل: نجد أولا محددة مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

وعليه إما أن لا يكون هناك حل للنظام أو قد يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول. وهذا يعتمد على كل من محددات المتغيرات المعطاة

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 12 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 3 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

لذا فان للنظام عدد لا نهائي من الحلول وللبحث عن مجموعة الحل نستخدم مبدأ الصف البسيطة.

$$3x - y + z = 4 ....D_1$$
$$x + 3y + 2z = 12 ....D_2$$
$$3x + 2y + 3z = 16 ....D_3$$
$$D_1 \rightarrow D_1 - 2D_2 , D_3 \rightarrow -2D_3 + 3D_1$$

وبتطبيق عمليات الصف البسيطة لنحصل على النظم المتكافئة

$$\left.\begin{matrix} -7y - 3z = -20 \\ x + 3y + z = 12 \\ -7y - 3z = -20 \end{matrix}\right\} \approx \left.\begin{matrix} x + 3y + 2z = 12 \\ -7y - 3z = -20 \\ -7y - 3z = -20 \end{matrix}\right\} \approx \left.\begin{matrix} x + 3y + 2z = 12 \\ -7y - 3z = -20 \end{matrix}\right\}$$

نفرض أن $t \in R$ ولنأخذ $z=t$ في هذا النظام لنحصل على

$$y=\frac{20-3z}{7}=\frac{20-3t}{7},$$

$$x=12-2z-3y \rightarrow x=\frac{24-5z}{7}=\frac{24-5t}{7}$$

ويكون حل النظام بدلالة t على النحو التالي

$$(x,y,z)=(\frac{24-5t}{7},\frac{20-3t}{7},t)$$

وعليه فيكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول معتمدا على قيمة t وعلى سبيل المثال فلو فرضنا قيمة t=-5 فان هذا الحل يصبح

$$(x,y,z)=(7,5,-5)$$

وبالتالي تصبح مجموعة الحل

$$S=\left\{(\frac{24-5t}{7},\frac{20-3t}{7},t)\right\}$$

3) حل نظام المعادلات الخطية المتجانسة

إن ما يميز هذا النوع من المعادلات أن الطرف الآخر يساوي صفرا فالأنظمة التالية تمثل أنظمة متجانسة.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0$$

في هذا النظام يتساوى فيه عدد المجاهيل مع عدد المعادلات وقد يقل عدد المعادلات عن عدد المجاهيل أيضا كما هو الحال في هذا النظام

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0$$

وللبحث عن حلول هذه الأنظمة من المعادلات نجد المحددات المرافقة لكل من المتغيرات المعطاة

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

خاصية من خواص المحددات

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ولكون $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ فانه يظهر لدينا احتمالين

1) هناك حل وحيد لهذا النظام إذا كان

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0).$$

2) إذا كانت $\Delta=0$ فان هناك عدد لا نهائي من الحلول.

مثال(2-49): حل نظام المعادلات المتجانسة التالية

$$3x - 4y = 0$$
$$2x + y = 0$$

الحل: نجد أولا محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \neq 0$$

$\therefore$ يوجد حل وحيد لهذا النظام وهو

$(x,y)=(0,0)$.

مثال(2-50): حل نظام المعادلات المتجانسة التالي

$$x - y + 2z = 0$$
$$2x + y - 3z = 0$$
$$4x - y + z = 0$$

الحل: نجد أولا محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ولان هذا المحدد صفرا فانه يوجد لهذا النظام عدد لانهائي من الحلول وللبحث عن الحل نستخدم طريقة الصف البسيطة

$D_3 \to 2D_1 + D_2$

$x - y + 2z = 0 ....D_1$

$2x + y - 3z = 0 ....D_2$

$4x - y + z = 0 ....D_3$

والنظام المكافئ لهذا النظام بعد سلسلة من العمليات

$x - y + 2z = 0$

$3x + y - 3z = 0$

وعلى اعتبار أن $t \in R$ وباختيار $z=t$ لنحصل على النظام التالي

$x - y = -2t$

$2x + y = 3t$

ويحل هذا النظام نحصل على حل مرتبط بالمتغير t

$$x = \frac{t}{3}, y = \frac{7t}{3}$$

وعليه فان مجموعة الحل هي

$$S = \left\{ (\frac{t}{3}, \frac{7t}{3}, t) : t \in R \right\}$$

مثال(2-51): على اعتبار أن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد مجموعة حل المعادلة $(A - x.A.A^{-1}) = 0$

الحل: من كون

$$x\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x \\ 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x + 3y \\ 5x + 0.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x + x + 3y \\ 2x + 5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3y \\ 7x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow 3y = 6, 7x = 21$$

$$\Rightarrow y = 2, x = 3 \Rightarrow (x, y) = (3, 2)$$

$$A.A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - xI = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-x \end{bmatrix}$$

$$|A - xI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-x)(1-x) - \sqrt{2}\sqrt{2} = 0$$

$$2 - 2x - x + x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

أمثلة إضافية

مثال(2-52): لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة العنصر a_{23} من A^{-1}.

الحل: ليكن أي عنصر من A^{-1} هو a_{mn} ومن العلاقة

$$a_{mn} = \frac{A_{nm}}{|A|} \Rightarrow a_{23} = \frac{A_{32}}{|A|}, A_{32} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(4-0) = -4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$a_{23} = \frac{-4}{11}$$

مثال(2-53): إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

وكان

$$A^2x=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة X.

الحل:

$$A^2.x=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}\Rightarrow x=A^{-2}.\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=(A^{-1})^2.\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-1\\-5&2\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix},(A^{-1})^2=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix}$$

$$x=(A^{-1})^2.\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&5\\25&14\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\-42\end{bmatrix}$$

مثال(2-54): إذا كان

$$\begin{vmatrix}2Cos^2 5° & Cos40° & 1\\ 2Cos^2 40° & Cos50° & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

أوجد محدد هذه المصفوفة.

الحل:

$$|A|=\begin{vmatrix}2Cos^2 5° & Cos40° & 1\\ 2Cos40° & Cos50° & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2Cos5°-1 & Cos40° & 1\\ 2Cos40°-1 & Cos50° & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(2Cos^2 5°-1).Cos50-(2Cos40°-1)Cos40°$$

ومن المتطابقة

$$2Cos^2 a-1=Cos2a \Rightarrow 2Cos^2 5°-1=Cos10°$$
$$\Rightarrow Cos10Cos50-Cos80°Cos40°=Cos10°Cos50°-Sin10°Sin50°$$
$$\Rightarrow Cos(50+10)=Cos60=\frac{1}{2}$$

مثال(2-55): على اعتبار أن

$$(A^{-1})'+x=I \Rightarrow x=I-(A^{-1})'$$

وأن

$$(A^{-1})'+x=I$$

أوجد المصفوفة X

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

وعليه نجد أولا المصفوفة النظيرة

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}}{4}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$(A^{-1})'=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$x=I-(A^{-1})'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

مثال(2-56): إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 4 & -12 & k\end{bmatrix}, \in R$$

وكانت درجة المصفوفة 2 أوجد قيمة k التي لا تحقق هذه الدرجة.

الحل: من المصفوفة A نأخذ مصفوفات جزئية من الرتبة الثانية مثل

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -12 & k \end{bmatrix}$$

ولكون

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & k \end{vmatrix} = -k - 20 \neq 0 \Rightarrow k \neq -20$$

تمارين عامة
الأسئلة المقالية

س1) على اعتبار أن b-a = -4، c-b = 2 أوجد محدد المصفوفة A حيث

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

س2) على اعتبار أن

$$a.b = 7 ، A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وإذا كان

$$|A.A'| = 8$$

فأوجد قيمة

$$|a + b|$$

س3) لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

والاقتران

$$f(x) = -x^2 + 1$$

فإذا كان Rank(A)=1 أوجد صورة المصفوفة f(A)

س4)

$$A=\begin{bmatrix}1-Sinx & 1-Cosx\\ Cosx & 1+Sinx\end{bmatrix}،\quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

أوجد قيمة x بالراديان الذي يجعل المصفوفة A عندها ليس لها معكوس بالنسبة لعملية الضرب.

س5) أوجد مجموع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix}|2x-1| & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=11$$

س6) أوجد محدد

$$\begin{vmatrix}4 & 0 & 6\\ 5 & 0 & 8\\ 7 & -4 & -9\end{vmatrix}$$

س7) إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}،B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}،C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

أوجد قيمة المحدد

$$|A(BC)|$$

س8) أوجد محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix}1 & bc & b+c\\ 1 & ca & c+a\\ 1 & ab & a+b\end{vmatrix}$$

س9) أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix}Sina & Sinb & 0\\ 1+Cosa & 1+Cosb & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

س10) أوجد مجموع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} |x+2| & 1 \\ |x^2-4| & 2 \end{vmatrix} = 0$$

س**11)** أوجد قيم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

س**12)** إذا كانت

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد

$$|A^{-1}|$$

س**13)** إذا كان

$$\begin{vmatrix} Cos50 & -Sin50 \\ -Cos20 & Sin20 \end{vmatrix} = 2x + \frac{7}{2}$$

أوجد قيمة X.

س**14)** إذا كان

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & 2b \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

س**15)** على اعتبار أن

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = k.(b-a):(c-a)$$

أوجد قيمة k .

س16) أوجد مجموع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

س17) في محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ k & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

إذا كان مرافق العنصر a_{22} هو العنصر 4، $k \in R$ أوجد قيمة k.

أسئلة موضوعية
على الفصل الثاني

س1) إن قيمة k التي تجعل لنظام المعادلات التالية

$$x + y + kz = 2$$
$$3x + 4y + 2z = k$$
$$2x + 3y - z = 1$$

أكثر من حل هي

$A)-2 \quad B)-1 \quad C)0 \quad D)3 \quad E)4$

س2) إذا كان

$$\begin{vmatrix} 2+a & 2-a & a \\ 3+a & 4-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix} = 18$$

فان قيمة a هي

$A)1$ $B)2$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

س3) إن محدد المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1+Cos\alpha & 1+Sin\alpha & 1\\ 1-Sin\alpha & 1+Cos\alpha & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

هو

$A)-1$ $B)0$ $C)1$ $D)Cos\alpha$ $E)Sin2\alpha$

س4) حتى تكون مجموعة حل النظام

$$ax-4y=a+1$$
$$2x+(a+6)y=a+3$$

مجموعة خالية فان قيمة a هي

$A)-6$ $B)-4$ $C)0$ $D)2$ $E)6$

س5) لدينا المصفوفات التالية

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}21\\ a+b\end{bmatrix}$$

وإذا كان

$$B=A^{-1}.C \Rightarrow a=$$

$A)-8$ $B)-6$ $C)-1$ $D)3$ $E)5$

س6) إن مجموع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix}-2 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 5\\ k & -3 & 4\end{vmatrix}$$

هو

$A)-4$ $B)-2$ $C)0$ $D)2$ $E)4$

س7) في محددة المصفوفة

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

كان مرافق العنصر

$$k \in R ، \ a_{22} = 4$$

فان قيمةk هي

$A)-4$ $B)-2$ $C)0$ $D)2$ $E)4$

س8) إذا كان

$$2A + 4\begin{bmatrix} 3 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

فان محددة A هي

$A)-3$ $B)-1$ $C)1$ $D)3$ $E)5$

س9) إن حاصل ضرب المحددتين.

$$\begin{vmatrix} Cos\frac{\pi}{12} & Sin\frac{\pi}{12} \\ Sin\frac{\pi}{12} & Cos\frac{\pi}{12} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

هو

$A)-2\sqrt{3}$ $B)-6$ $C)-\sqrt{3}$ $D)2\sqrt{3}$ $E)4\sqrt{3}$

س10) لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

فان قيمة

$$|A| - |A^{-1}|$$

هي

$A)0$ $B)4$ $C)6,9$ $D)8$ $E)9,9$

س11) لدينا

$$\forall a,b \in R, A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -2 & b \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}$$

وكان

$$A^t = A^{-1}$$

فان a+b هي

$A)3 \quad B)4 \quad C)6 \quad D)8 \quad E)9$

س12) لدينا

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}، A^{-1}$$

هي المصفوفة النظيرة فان قيمة

$$|A|-|A^{-1}|$$

يساوي

$A)0 \quad B)4 \quad C)6,9 \quad D)8 \quad E)9,9$

س13) إذا كان

$$f(x)=\begin{vmatrix} \left[\frac{2}{3}x+1\right] & 1-Sgn(x-3) \\ \ln e^x & 3 \end{vmatrix}$$

فان قيمة f(2) هي

$A)2 \quad B)1 \quad C)0 \quad D)-1 \quad E)-2$

س14) لدينا

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فان القيم الحقيقية إذا كان

$$|A.B+x|=3$$

هي

$A)\{-2,1\} \quad B)\{-3,5\} \quad C)\{-1,4\} \quad D)\{-7,1\} \quad E)\{2,-5\}$

س15) إن قيمة

$$\begin{vmatrix} Cosx & Sinx \\ -1 & Secx \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} Tanx & 1 \\ Sinx & Cosx \end{vmatrix}$$

هي

$A)1 \quad B)Sin2x \quad C)Cos2x \quad D)Sin^2x \quad E)Cos^2x$

س16) لدينا

$$2x+y=2$$
$$z-4y=0$$
$$4x+z=6$$

فانx.y.z هي

$A)-2 \quad B)\frac{-1}{2} \quad C)2 \quad D)3 \quad E)4$

س17) على اعتبار أن

$$a.b.c=2, a^3+b^3+c^3=12,$$

فان

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} =$$

$A)-14 \quad B)-6 \quad C)0 \quad D)6 \quad E)18$

س18) حتى يكون للنظام

$$3x+(k-1)y=k+1, (k+1)x+y=3$$

حلا لا نهائي فان قيمة k يجب أن تساوي

$A)-3 \quad B)-2 \quad C)-1 \quad D)1 \quad E)2$

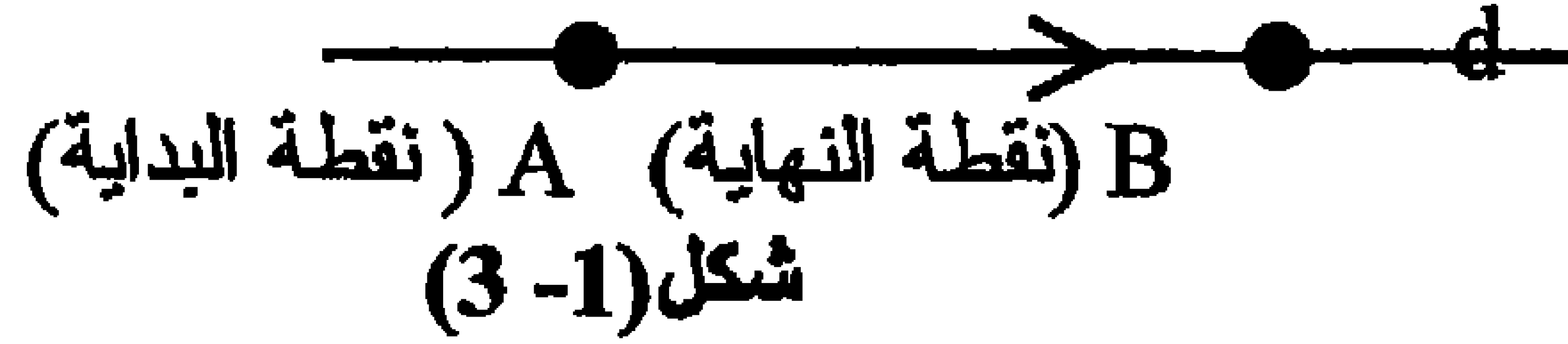
الفصل الثالث
فضاء المتجهات الحقيقية

الفصل الثالث
فضاء المتجهات الحقيقية

3 -1 فضاء المتجهات الحقيقية Real Vector Space :

3 -1 -1 القطعة المستقيمة الموجهة Directed Linear Segment

إذا اخترنا نقطتين على المستقيم $\vec{d}$
وسمينا النقطة الأولى بنقطة البداية ولتكن A وسمينا
النقطة الأخرى بنقطة النهاية ولتكن النقطة B ونطلق على القطعة المستقيمة
بالقطعة الموجهة والشكل (1- 3) يوضح ذلك .

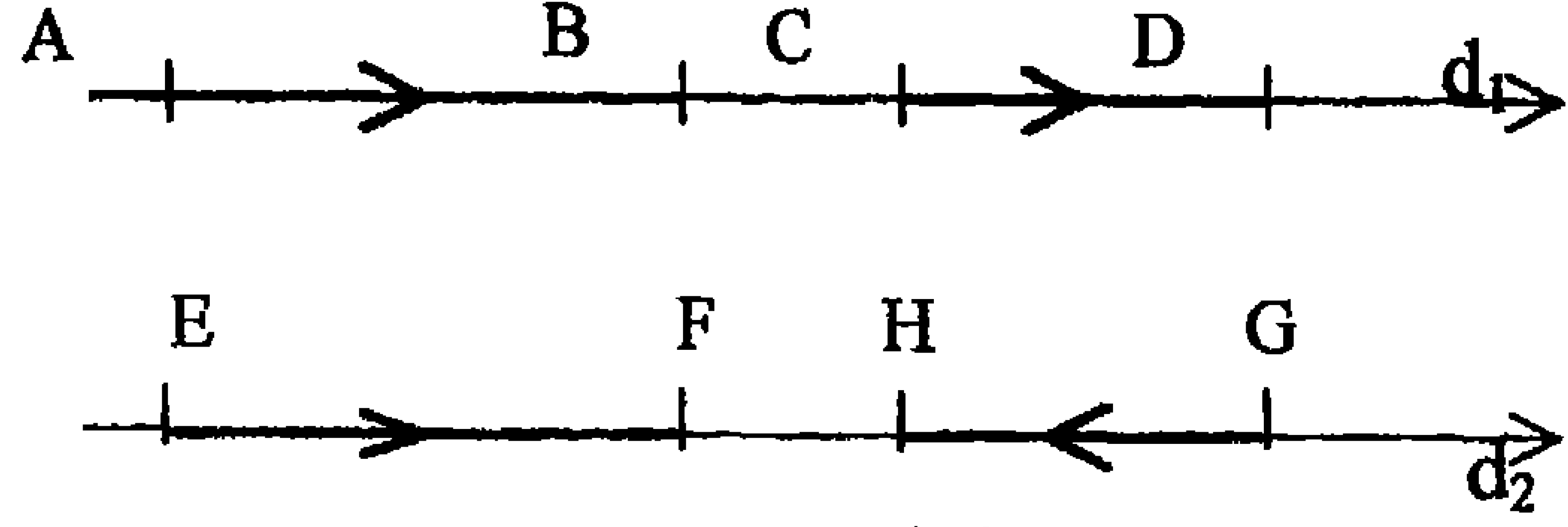


شكل(1- 3)

ونشير إلى ذلك بالرمز $\overrightarrow{AB}$.
وهنا نشير إلى بعض الملاحظات لا بد من ذكرها .
*نسمي المستقيم d حامل للقطعة الموجهة $\overrightarrow{AB}$.

*تسمى المسافة الواقعة بين النقطتين A , B بطول (كبر) القطعة
الموجة $\overrightarrow{AB}$.
ويرمز لها بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\| = |\overrightarrow{AB}|$.

* ليكن المستقيمان $d_1 // d_2$ وإذا كانت القطع الموجة $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ واقعة على d_1
بينما $\overrightarrow{EF}$، $\overrightarrow{GH}$
تقع على d_2 فإننا نقول أن القطع المتجه $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$
لها نفس الاتجاه بينما $\overrightarrow{GH}$ لها اتجاه معاكس والشكل (2- 3)
يوضح ذلك .

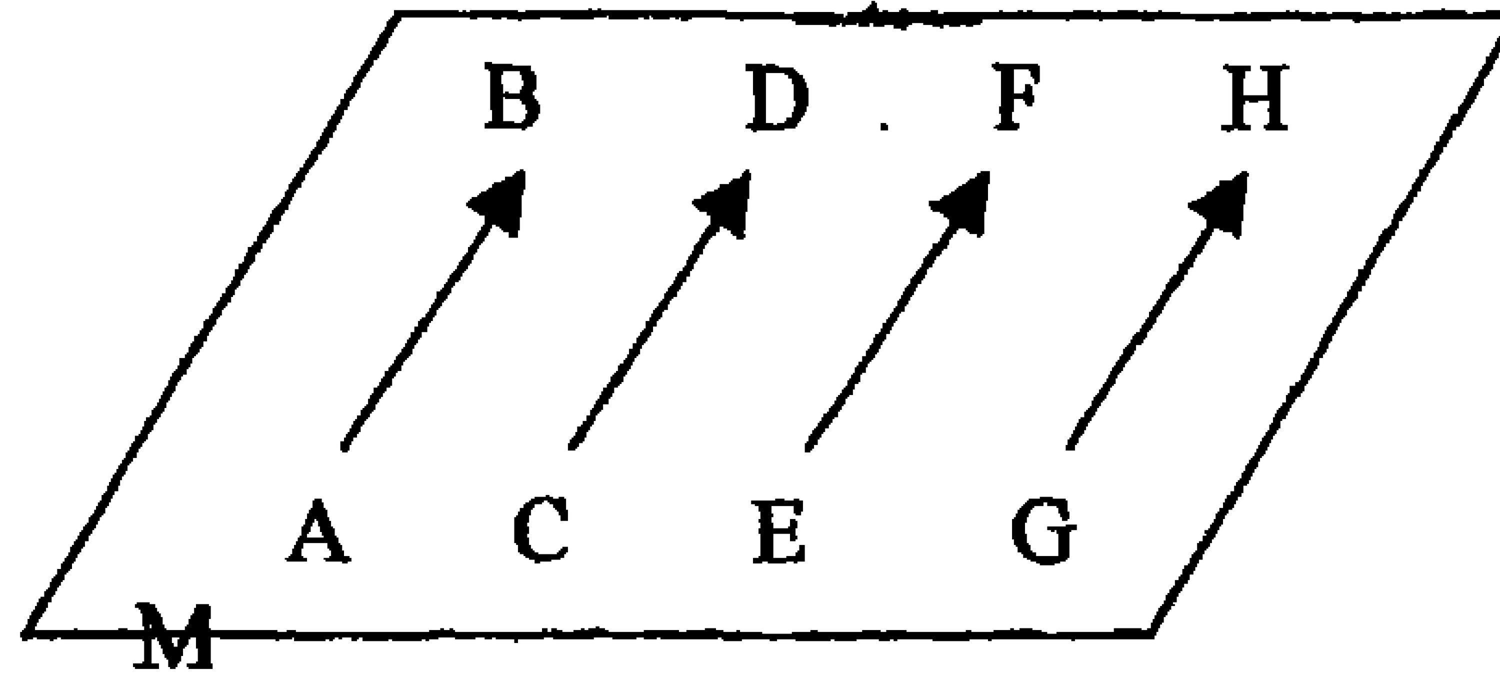


شكل(2- 3)

2 - 1- 3 المتجه :

في أي مستوى لتكن مجموعة القطع الموجة هي M فلأي قطعتين موجهتين تنتميان إلى مجموعة المتجهات E فإن :

1) لهما نفس الاستقامة .
2) لهما نفس الاتجاه .
3) لهما نفس الطول كما هو موضح في شكل (3- 3) .



شكل(3- 3)

وفي هذه الحالة فإن القطع المستقيمة الموجة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ ويشار لها كما يلي .

$$\overrightarrow{AA} \equiv \overrightarrow{BB} \equiv \overrightarrow{CC} \equiv ......$$

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ ونقبل حالة ومثل هذه العلاقة المعرفة ($\equiv$) تسمى بعلاقة التكافؤ وكل صنف من صنوف التكافؤ للمجموعة M تسمى متجه وعليه فإن مجموعة المتجهات المتكونة

$$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}, ...\}$$

كل عنصر من عناصرها يسمى متجها وبالتالي فإن كل من

$\overrightarrow{AB}$ ،$\overrightarrow{CD}$ ،................

يسمى متجها. وتسمى مجموعة المتجهات

$$\{\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \overrightarrow{DD}, ...\}$$

بمجموعة المتجهات الصفرية إذا كان كل عنصر من عناصرها يسمى متجه صفري$(\vec{0})$

أما طول القطعة الموجة $\overrightarrow{AB}$ يسمى بطول المتجه Norm. ويرمز له بالرمز $\|AB\|$

2- 3 جمع وطرح المتجهات :

لتكن مجموعة المتجهات في المستوى V فلجمع المتجهين

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in V$$

طريقتان .

1) الطريقة الأولى (طريقة المتوازي الأضلاع) :

في هذه الطريقة نستطيع جمع المتجهين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

نقوم برسم متجه $\overrightarrow{AF}$ يوازي المتجه $\overrightarrow{CD}$

ويبدأ بالنقطة A ثم نكمل متوازي الأضلاع ABEF ويكون مجموع المتجهين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

هو القطر الأكبر لمتوازي الأضلاع AE أما الفرق بينهما فهو القطر الأصغر ونستطيع كتابة ذلك بصيغة رياضية على النحو

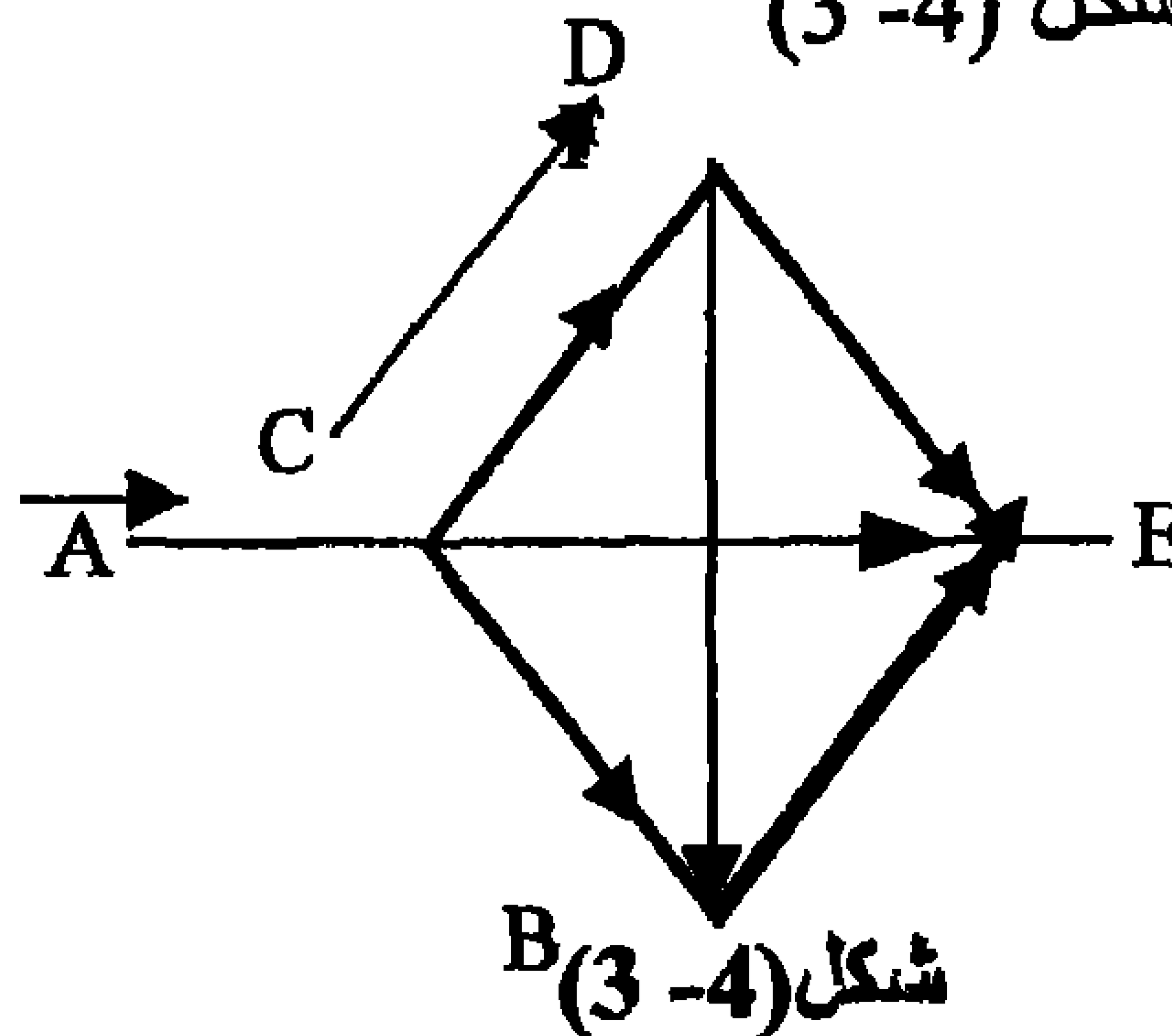
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

وكذلك

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FB}$$

كما هو موضح في شكل (4- 3)



شكل(4- 3)

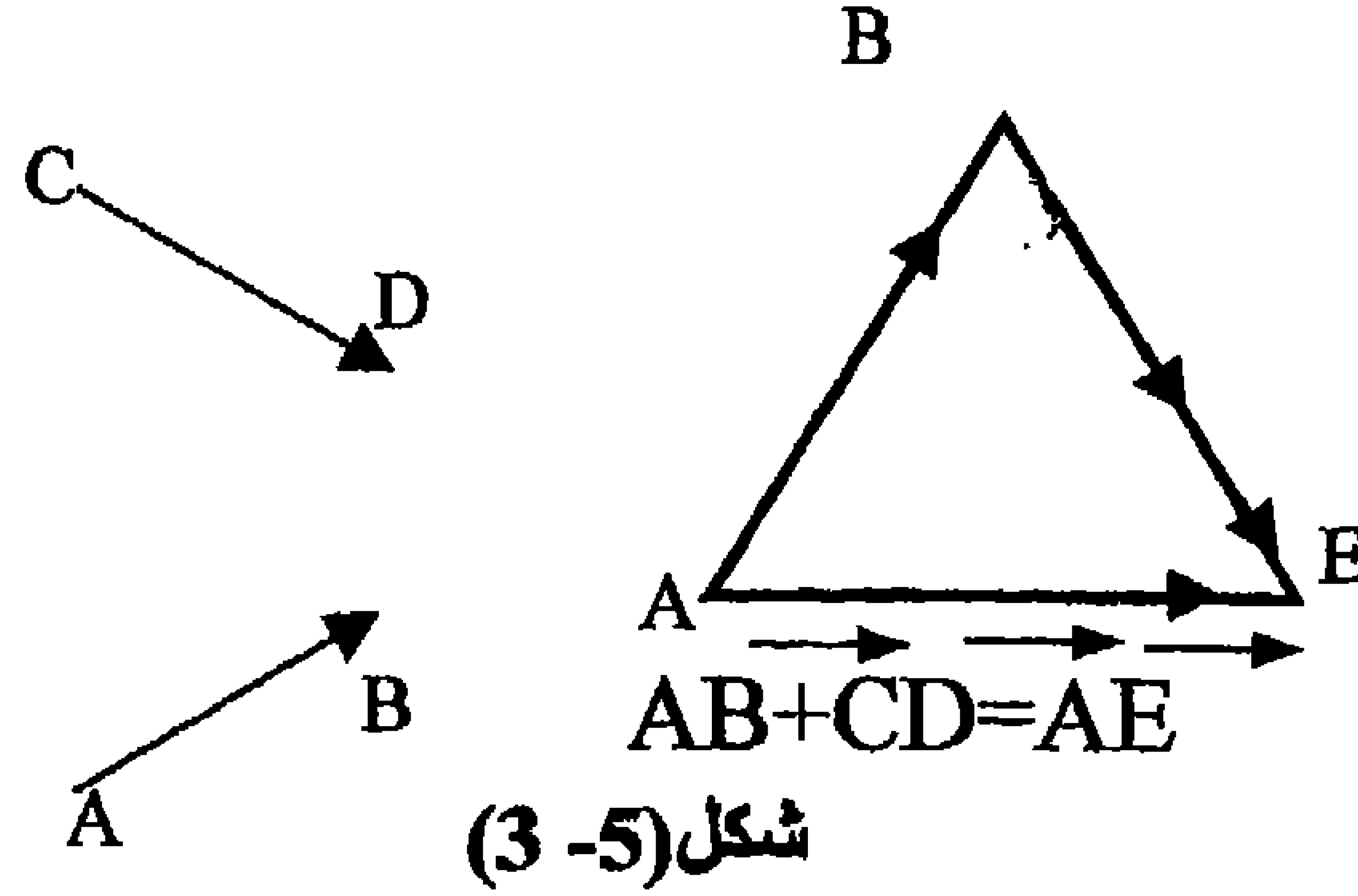
2) الطريقة الثانية (طريقة متعدد الأضلاع) :

من الشكل (5- 3) نرسم القطعة المتجهة الموازية القطعة المتجهة الأصلية $\overrightarrow{AB}$

ومن حيث انتهت هذه القطعة المتجهة نرسم قطعة متجهة $\overrightarrow{BE}$ موازية للقطعة المتجهة $\overrightarrow{CD}$

ثم نقفل المضلع بالاتجاه المعاكس $\overrightarrow{AE}$ ويكون المتجه $\overrightarrow{AE}$ هو مجموع المتجهين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ وبصيغة رموز فإن

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$$



شكل(5- 3)

ملاحظة: لكون

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

فإن $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ أي أن المتجه $\overrightarrow{BA}$ هو المتجه العكسي بالنسبة لعملية الجمع .

3-3 خصائص عملية الجمع على المتجهات :

لتكن مجموعة المتجهات على المستوى V

1) إن عملية الجمع الاعتيادي مغلقة على مجموعة المتجهات .

2)

$$\forall A\in V\Rightarrow \vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$$

يعني المتجه $(\vec{0})$ هو عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمع .

3)

$$\forall \vec{A},\vec{B},c\in V\Rightarrow (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

(الخاصية التجميعية)

4)

$$\forall \vec{A},\vec{B}\in V\Rightarrow \vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

(خاصية الإبدال)

(5

$$\forall \vec{A} \in V \Rightarrow \vec{A}+\vec{x}=\vec{x}+\vec{A}=\vec{0}, \vec{x} \in V$$

حيث نسمي $\vec{x}$ هو المتجه العكسي بالنسبة لعملية الجمع $\vec{x}=-\vec{A}$

نتيجة: لتوفر الشروط السابقة فإننا نسمي النظام الثنائي (+ , V) زمرة إبدالية .

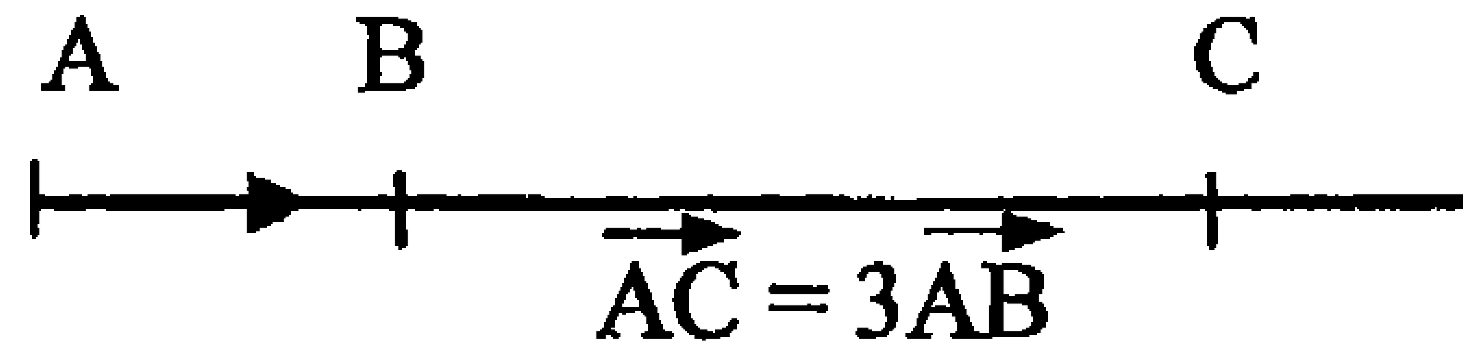
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

4 ـ 3 ضرب المتجه في عدد حقيقي :

ليكن المتجه $\vec{A}$ والعدد $k\neq0$، $k\in R$ فإن ناتج ضرب العدد في المتجه $\overrightarrow{KA}$ هو متجه أيضا ً وعلى نفس الاستقامة . فإذا كان .

1) $k>0$ فإن اتجاه $\overrightarrow{KA}$ هو نفس اتجاه المتجه $\vec{A}$ كما هو واضح في شكل(6- 3) وعلى سبيل المثال إذا كانت قيمة

$K = 3$

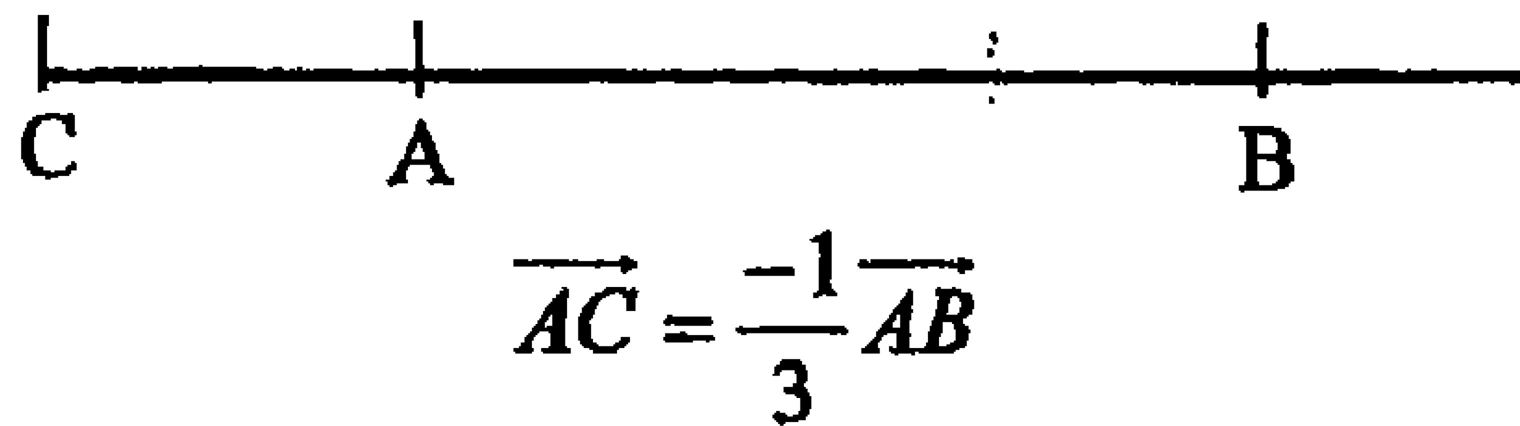


شكل(6- 3)

2) إذا كانت قيمة $K<0$ فإن اتجاه المتجه A، KA بالاتجاه المعاكس كما هو واضح في شكل(7- 3) آخذين قيمة

$$k=\frac{-1}{3}$$

على سبيل المثال .



شكل(7- 3)

3) إذا كانت قيمة

$$k=0 \Rightarrow k.\vec{A}=\vec{0}$$

4) إذا كانت قيمة

$$k\neq 0 \Rightarrow k.\vec{0}=\vec{0}$$

نتيجة : إذا كان لدينا المتجهين

$\vec{A},\vec{B} \neq 0، k \neq 0، \vec{A} = k.\vec{B} \Leftrightarrow AB // CD$

5- 3 خواص ضرب عدد ثابت في متجه:

لدينا المتجهين

$\vec{A}، \vec{B} ، m ,n \in R \Rightarrow$

$1) m(\vec{A}+\vec{B}) = m.\vec{A} + m.\vec{B}$

$2) (m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

$3) m(n.\vec{A}) = (m.n).\vec{A}$

مثال(1- 3): في الشكل (8-3) إذا كان $| AP | = 2 | PC |$
أوجد $\overrightarrow{BP}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$.

الحل:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} - BC$$

ولان

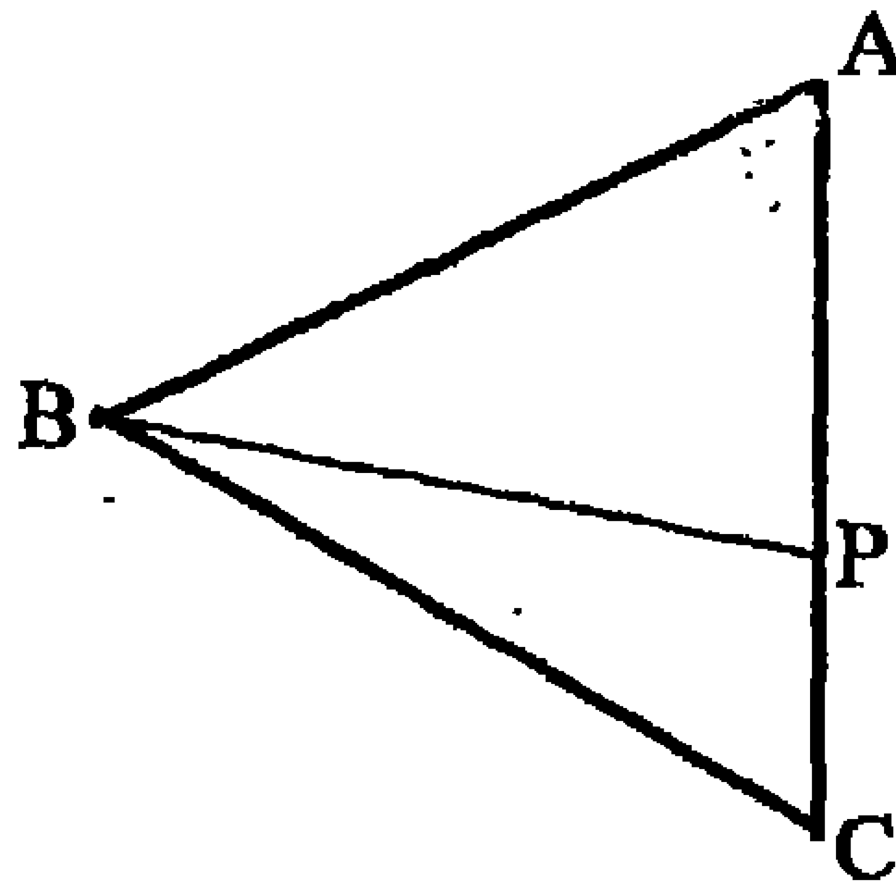
$$|AP| = 2\left|\overrightarrow{PC}\right|$$

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{CP}$$

وعليه فان

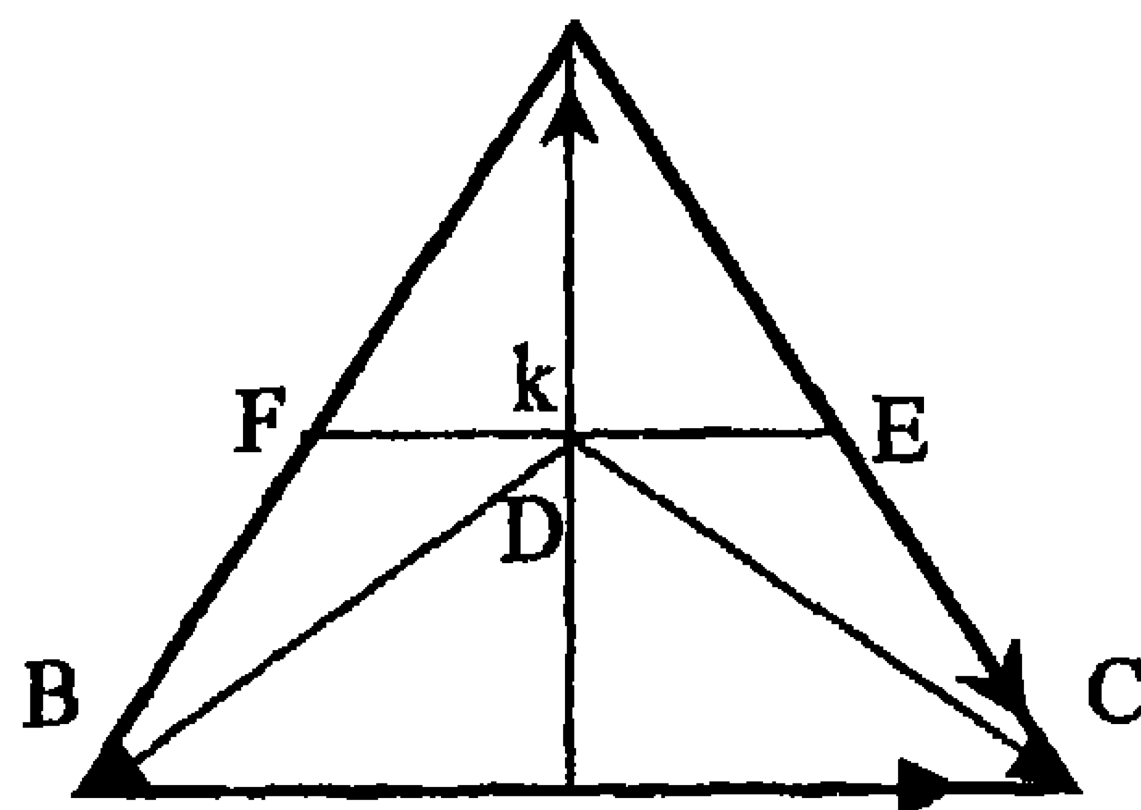
$$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA} = -2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$



شكل(8-3)

مثال(2- 3): في الشكل (9- 3) المثلث ABC ، النقاط D, E , F نقاط منتصف الأضلاع .



شكل(9- 3)

أثبت أن

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KD}$$

الحل: من كون

$$|Ak|=|kD| \Rightarrow \overrightarrow{kA}=-\overrightarrow{kD}$$

ومن تعريف المجموع فان

$$\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DC}$$

وعليه فان

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=-\overrightarrow{KD}+(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DC})$$
$$=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$$

ومن كون

$$|DB|=|DC| \Rightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=0$$

6- 3 المتجه المثبت :

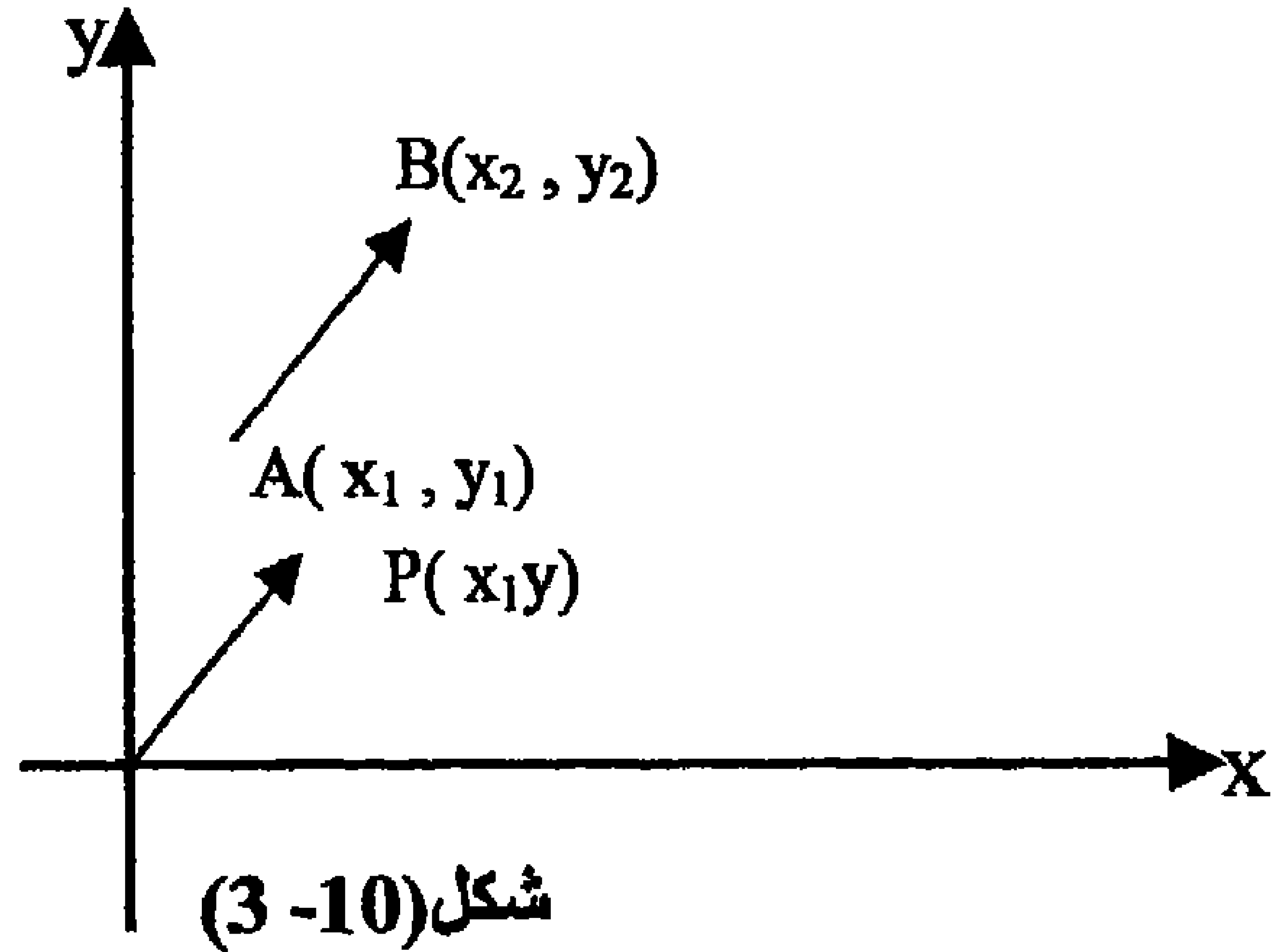
ليكن المتجه $\overrightarrow{AB}$ متجه يدور في المستوى الإحداثي وإذا أخذنا

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KD}$$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$ فإننا نسمي المتجه $\overrightarrow{OP}$ بالمتجه المثبت للمتجه $\overrightarrow{AB}$ ويمكن أن نعبر عن المتجه المثبت $\overrightarrow{OP}$ بالمتجه $\overrightarrow{P}$ وفي المستوى الإحداثي لتكن $A(x_1 , y_1)$ ، $B(x_2 , y_2)$ فإن المتجه المثبت للمتجه AB هو $P(x , y)$ وعليه فإن :

$$\overrightarrow{OP}=\vec{P}=\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=[x,y]=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(x,y)$$

ويمثل الإحداثي x هو الإحداثي الأول للمتجه $\overrightarrow{P}$ بينما y هو الإحداثي الثاني للمتجه $\overrightarrow{P}$ ولأن: $x=x_2-x_1$، $y=y_2-y_1$ وهذا واضح في شكل(3-10)



شكل(3 -10)

مثال(3- 3): لتكن النقاط A(1 , 4) , B = (2 , - 3) .
أوجد المتجهات التالية $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. ثم مثل هذه المتجهات على المستوى الإحداثي .

الحل:

$$B=(2,-3)=(x_2,y_2)، A=(1,4)=(x_1,y_1)$$

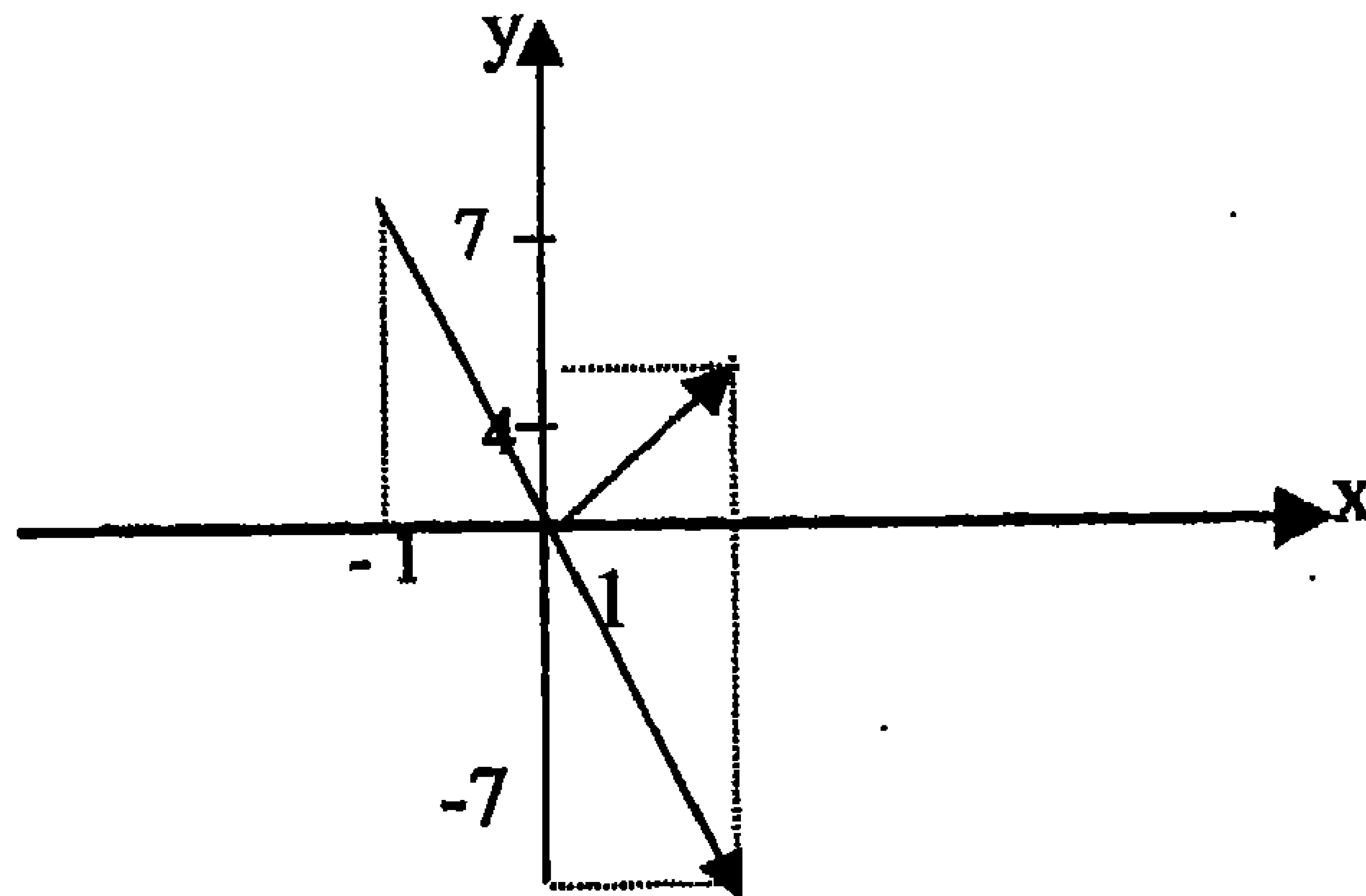
الآن

$$\overrightarrow{A}=\vec{0}A=(1,4)$$

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

$$=(2-1,-3-4)=(1,-7)$$

$$\overrightarrow{BA}=(x_1-x_2,y_1-y_2)=(1-2,4-(-3))=(-1,7)$$



شكل(3 -11)

3 -7 طول المتجه :

لتكن $A=(x_1 , y_1) , B=(x_2 , y_2)$ نقطتين في المستوى الإحداثي . فإذا كان المتجه المثبت للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هو $P=(x , y)$ فإن طول المتجه والذي سنرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$ هو

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{P}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال(4- 3): لدينا النقاط التالية $A=(1, 2) , B=(4 , -1) , c=(0 , 2)$.

أوجد طول المتجهات $\vec{A}$، $\overrightarrow{BC}$

الحل:

$$1)\|\vec{A}\| = \|\overrightarrow{0A}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$2)\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(0-4)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

3 -8 متجه الوحدة Unit Vector:

تعريف(3-1): يسمى المتجه الذي طوله وحدة واحدة بمتجه الوحدة .

مثال(5- 3): هل يعتبر المتجه

$$\vec{A} = (\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$$

متجه وحدة ؟

الحل: نجد طول المتجه $\vec{A}$ حيث أن :

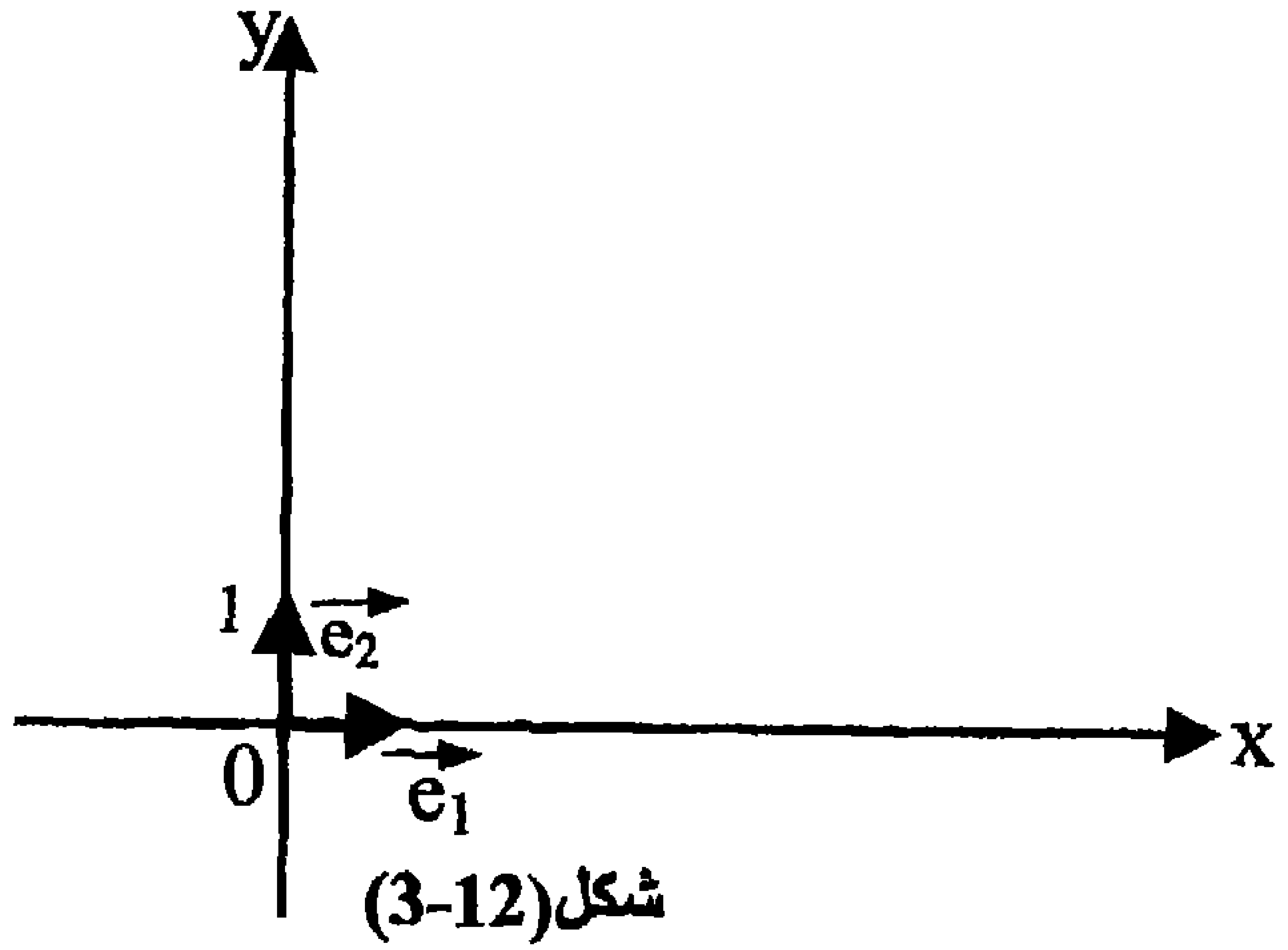
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(\frac{-3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

وعليه فإن المتجه $\vec{A}$ هو متجه وحدة .

ونستطيع التعبير عن متجه الوحدة على كل من الإحداثيين السيني والصادي على النحو .

$$\vec{e_1} = \vec{i} = (1,0), \vec{e_2} = \vec{j} = (0,1)$$

كما هو واضح في شكل (12- 3) .



شكل(3-12)

9- 3 جمع وطرح متجهين:

ليكن لدينا المتجهين

$$\vec{A} = (x_1, y_1), \vec{B}(x_2, y_2) \Rightarrow$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$
$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

10- 3 ضرب عدد حقيقي في متجه :

ليكن لدينا المتجه $\vec{A} = (x , y)$ وكان $k \in R$ فإن .

$$k.\vec{A} = k(x, y) = (kx, ky)$$

نتيجة:

$$|k.\vec{A}| = |k|.|\vec{A}|$$

مثال(6- 3): لدينا المتجهين $\vec{A}=(3,-2), \vec{B}=(-1,4)$

أوجد $\vec{A} - 3\vec{B}$.

الحل:

$$A - 3B = (3,-2) - 3(-1,4) = (3,-2) + (3,-12) = (6,-14)$$

مثال(7- 3): لدينا المتجه $\overrightarrow{A} = (-1, 2)$ ، $AB = (3, -4)$
أوجد قيمة المتجه $-2\overrightarrow{B}$.

الحل: ليكن المتجه $\overrightarrow{B} = (x, y)$ وبما أن .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$$

$$(3,-4) = (x,y) - (-1,2). \Rightarrow (x,y) = (3,-4) + (-1,2) = (2,-2)$$

∴ المتجه $\overrightarrow{B} = (x,y)$ وبالتالي فان $-2\overrightarrow{B} = (-4,4)$

مثال(8- 3): لدينا المتجهات

$$\vec{A} = (3,-2), \vec{B} = (-4,3), \vec{C} = (-11,8)$$

أوجد قيم x , y التي تحقق المساواة .

الحل: بما أن

$$x.\vec{A} + y.\vec{B} = \vec{C}$$

$$\Rightarrow x(3,-2) + y(-4,3) = (-11,8) \Rightarrow (3x,-2x) + (-4y,3y) = (-11,8)$$

$$\Rightarrow (3x - 4y, -2x + 3y) = (-11,8)$$

$$\Rightarrow 3x - 4y = -11, 2x + 3y = 8$$

وبحل نظام المعادلات الخطية نجد أن :

$$x = -1, y = 2$$

11- 3 التراكيب الخطية لمتجهين :

تعريف(2-3): إذا كان لدينا المتجهين $\overrightarrow{A} , \overrightarrow{B}$ وكان $P , k \in R$ عددين حقيقيين فإننا نسمي $P\overrightarrow{A} + k\overrightarrow{B}$ مركبة خطية للمتجهين $\overrightarrow{A} , \overrightarrow{B}$
وإذا كان المتجهين $\overrightarrow{A} , \overrightarrow{B}$ ليسا متوازيين في نفس المستوى فإننا نستطيع كتابة كل متجه بدلالة مركبته الخطية .

مثال(9- 3): لدينا المتجه $A = \overrightarrow{(3 , -5)}$ أكتب المتجه $\overrightarrow{A}$ بدلالة المتجهين $\overrightarrow{e_1} , \overrightarrow{e_2}$.

الحل: يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{A} = (3 , -5)$ على الصورة .

$$\vec{A} = (3,-5) = (3,0) + (0,-5) = 3(1,0) - 5(0,1) = 3\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2}$$

ملاحظة : يعتبر المتجهان $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ متجها القاعدة الأساسية ويمكن التعبير عن أي متجه $\overrightarrow{A}$ بدلالة المتجهين $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ كتركيب خطي أي :

$$\vec{A} = (x, y) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

مثال(10- 3): بين أن المتجه $\overrightarrow{A} = (13, -23)$ هو تركيب خطي للمتجهين $\overrightarrow{C} = (-3, 7)$ ، $\overrightarrow{B} = (2, -1)$

الحل: إذا كان المتجه $\overrightarrow{A}$ هو تركيب خطي للمتجهين $\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ ،
$\forall x, y \in R$
فإن الشرط الوحيد لذلك هو .

$$\vec{A} = x\vec{B} + y\vec{C}$$

وبالتعويض عن قيم كل متجه نستطيع كتابة.

$$(13,-23) = x(2,-1) + y(-3,7) = (2x,-x) + (-3y,7y)$$
$$\Rightarrow (13,-23) = (2x - 3y, -x + 7y)$$

وبحل نظام المعادلات الخطية :

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 3y = 13 \\ -x + 7y = -23 \end{matrix}\right\} .$$

نجد أن $x=2, y=-3$ وعليه فان $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{B} - 3\overrightarrow{C}$
ولأنه أمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{A}$ كتركيب خطي بدلالة $\overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}$ حيث أنه تم إيجاد قيم حقيقية لكل من x, y ويتم المطلوب .

3 -12 الضرب الداخلي لمتجهين The Scalar Product of two Vectors

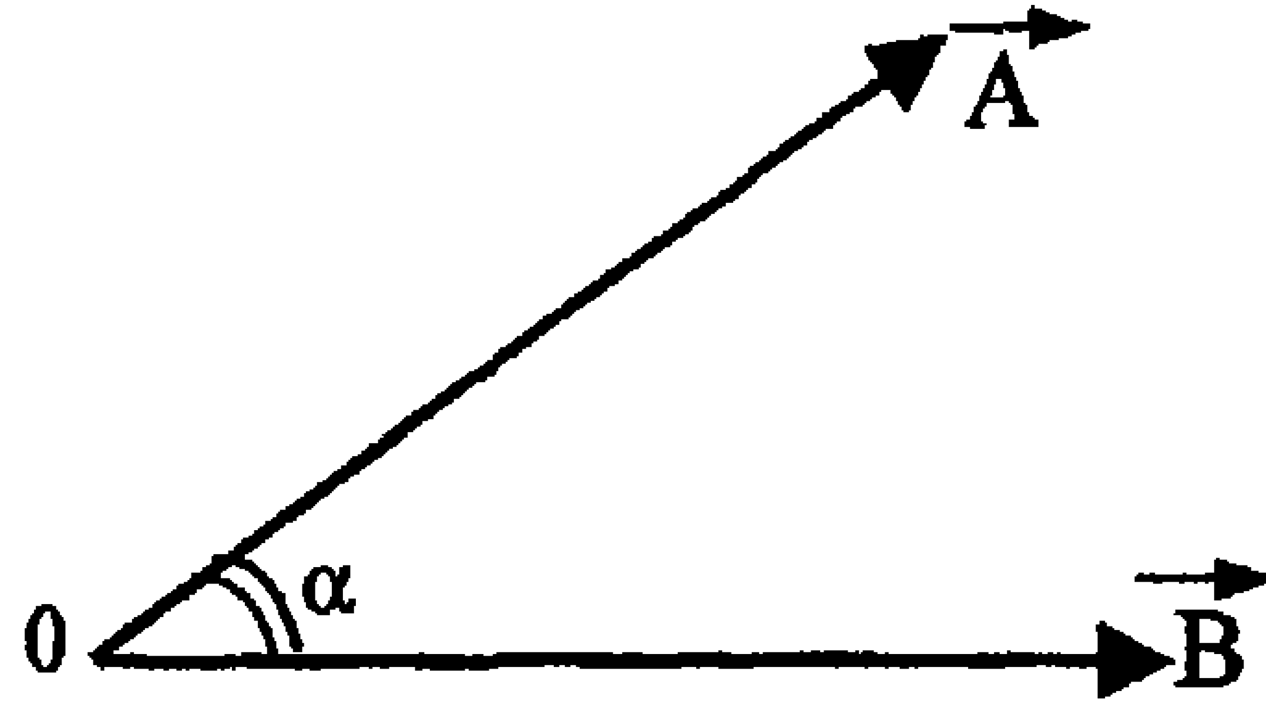
تعريف(3-3): يقال للقيمة الحقيقية الناتجة عن ضرب المتجهين

$$\vec{A} = (x_1, y_1), \vec{B} = (x_2, y_2) \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = x_1 y_1 + x_2 . y_2$$

بالضرب الداخلي ، ويعبر عن الضرب الداخلي بالصورة A.B أو بالصورة <A.B>

نظريـــة(1- 3): إن الضرب الداخلي للمتجهين $\overrightarrow{A} . \overrightarrow{B}$ اللذان يحصران بينهما زاوية مقدارها α والموضحة بالشكل (13- 3) هو .

$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| Cos\alpha$$



شكل(13- 3)

نتـــائـــج :

$$1) Cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x^2{}_1 + y^2{}_1}\sqrt{x^2{}_2 + y^2{}_2}}$$

لأي متجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ فحتى يكون .

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

13- 3 خواص الضرب الداخلـــي :

$$1) \vec{A}.\vec{A} = \|A\|^2 \geq 0$$

$$2) \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

$$3) \vec{A}.\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = 0$$

$$4) \vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

$$5) \forall m \in R \Rightarrow (m.\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(m\vec{B})$$

$$6) \forall m,n \in R \Rightarrow (m\vec{A})(n\vec{B})$$

الآن نتناول الأمثلة التوضيحية التالية:

مثال(11- 3): لدينا .

$$\vec{A} = (3,-2), \vec{B} = (5,-4)$$

أوجد $\vec{A}.\vec{B}$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = (3,-2).(5,-4) = (3)(5) + (-2)(-4) = 15 + 8 = 23$$

مثال(12- 3): إذا كان

$\vec{A}=(Cos80°,-Sin100°)$ $\vec{B}=(Cos100°,Sin80°)$

أوجد $\vec{A}.\vec{B}$

الحل: لكون

$\vec{B}=(Cos100°,Sin80°)$ ، $\vec{A}=(Cos80°,-Sin100°)$

$$\vec{A}.\vec{B}=Cos80°Cos100°-Sin80°Sin100°=Cos(100°+80°)$$

$$\Rightarrow Cos(180°)=-1$$

مثال(13- 3): لدينا المتجهين

$\vec{B}=2\vec{e_1}+4k\vec{e_2}$ ، $\vec{A}=(2k-1)\vec{e_1}-3\vec{e_2}$

أوجد قيمة k التي تجعل $\vec{A}\perp\vec{B}$.

الحل: حتى يكون $\vec{A}\perp\vec{B}$ فإنه يتوجب أن يكون

$$\vec{A}.\vec{B}=0$$

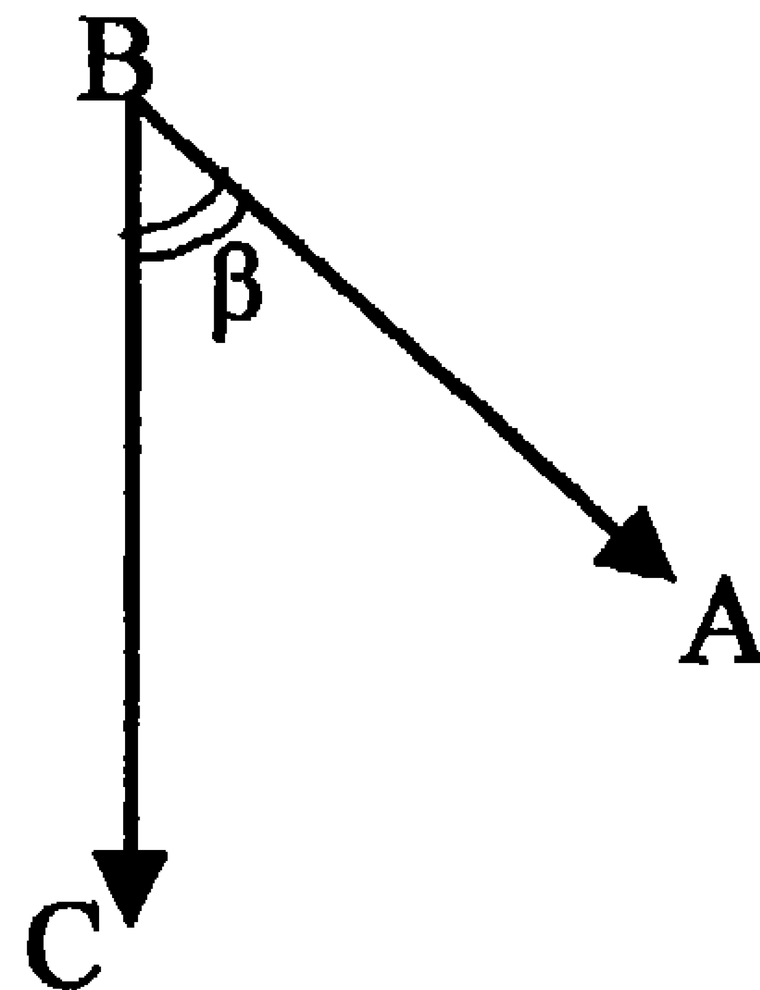
$$\vec{A}.\vec{B}=(2k-1).2+(-3).4k=0\Rightarrow 4k-2-12k=0\Rightarrow$$

$$-8k=2\Rightarrow k=\frac{2}{-8}=\frac{-1}{4}$$

مثال(14- 3): لدينا النقاط :

A = (-2 , 1) , B = (0 , 3) , C = (-4 , 7)

أوجد قياس الزاوية ABC بالدرجات كما هو واضح في شكل (14- 3) .



شكل(14- 3)

الحـــل: بالنظر إلى الشكل(14- 3) فإن الزاويـــة المطلوبة محددة بالمتجهين

$\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}$

ولهذا السبب نجد الضرب الداخلي بين المتجهين $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ على النحو التالي :

$$\overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B} = (-2,1) - (0,3) = (-2,-2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (-4,7) - (0,3) = (-4,4)$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-2,-2).(-4,4) = 8 - 8 = 0$$

ولذا فإن المتجهين $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ ، أي أن قياس الزاوية $ABC = 90$

مثال(15- 3): لدينا المتجهات $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ وإذا كان

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}, \left\|\vec{a}\right\| = 2\left\|\vec{c}\right\|$$

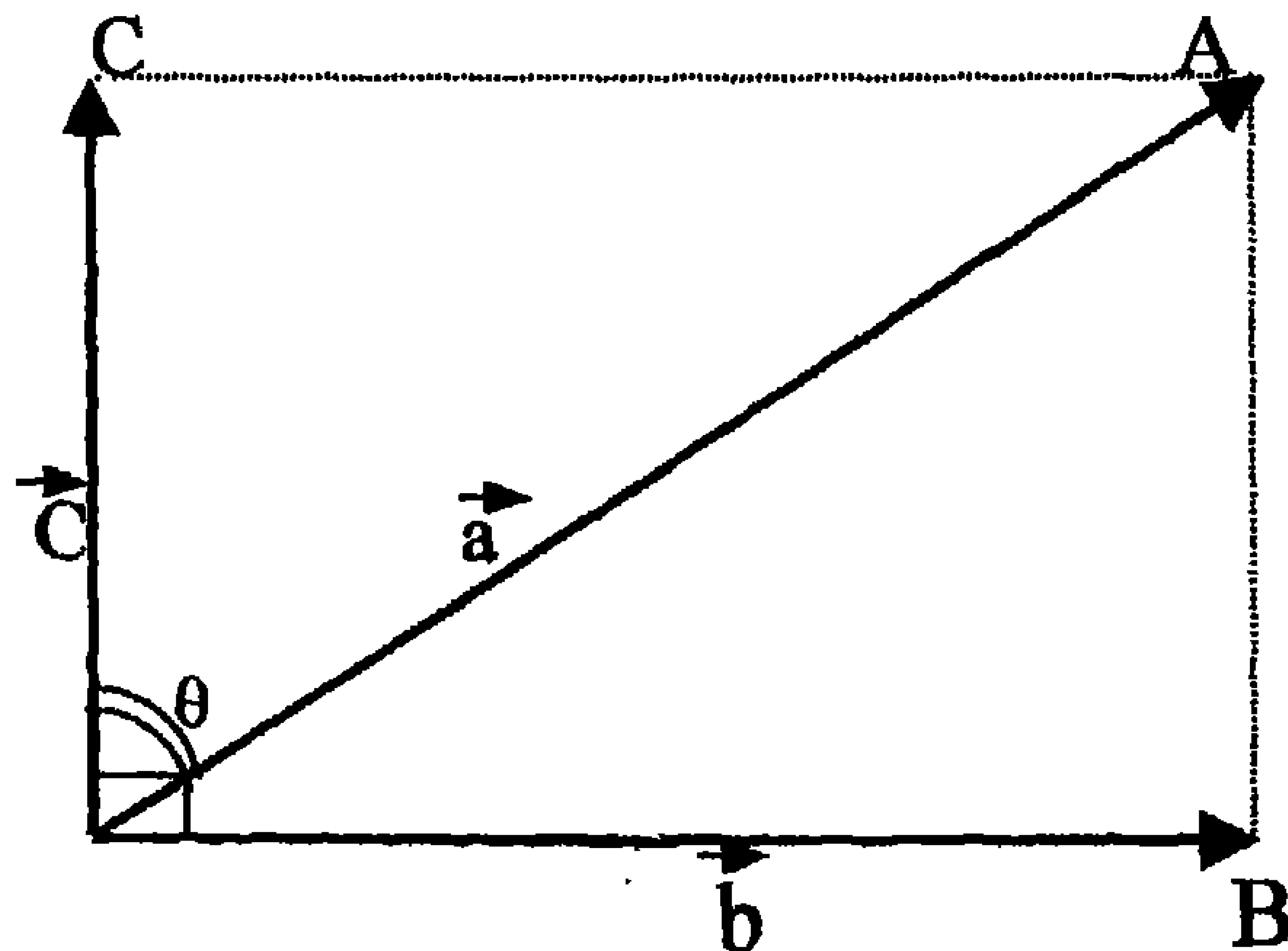
المطلوب:أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$, $\vec{c}$

الحـــل: من المعطيات نستطيع رسم الشكل(15- 3) والذي يحقق الشروط وهي .
$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ وكذلك $\vec{b} \perp \vec{c}$

وفي المثلث OAC مثلث قائم الزاوية وعليه فإن .

$$Cos(\vec{a},\vec{c})$$

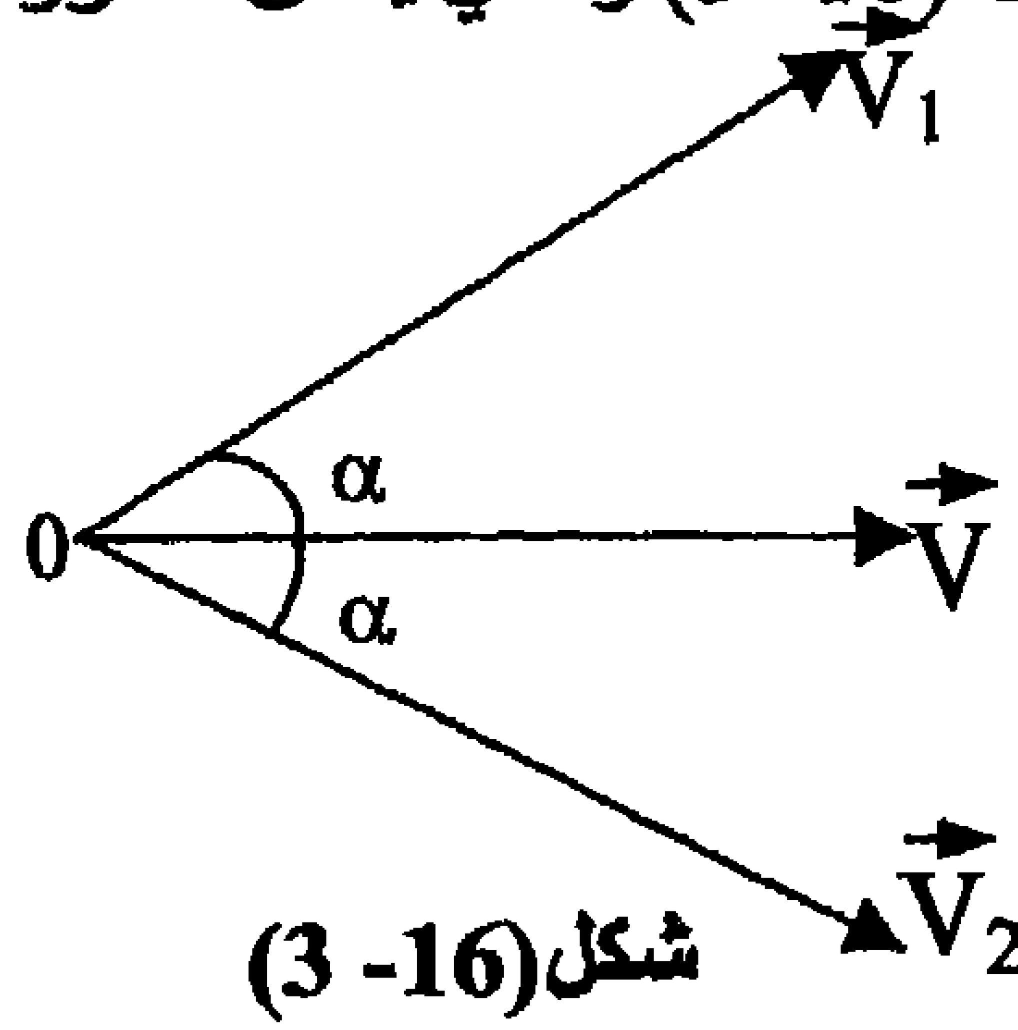
$$= Cos\theta = \frac{\left\|\vec{c}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{\left\|\vec{c}\right\|}{2\left\|\vec{c}\right\|} = \frac{1}{2}$$



شكل(3 5

مثال(16- 3): لدينا المتجهين $\overrightarrow{V_2} = (12 , 5)$, $\overrightarrow{V_1} = (3, 4)$

وعلى اعتبار أن المتجه $\vec{V} = (1, a)$
هو المنصف للزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ والمطلوب إيجاده a.
الحـــل: نرسم الشكل (16- 3) والذي يحقق الشروط المعطاة



شكل(16- 3)

ومن العلاقة بين الزاوية المحصورة بين المتجهين

$$Cos\theta = \frac{V.V_1}{\|V\|.\|V_1\|} = \frac{3+4a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{9+16}}\text{..........................(1)}$$

$$Cos\theta = \frac{V.V_2}{\|V\|.\|V_2\|} = \frac{12+5a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{144}+25}\text{......................(2)}$$

وبما أن الزاويتين متساويتين لأن $\vec{V}$ منصف $\therefore$ (2)=(1) وعليه فإن

$$\frac{3+4a}{5\sqrt{1+a^2}} = \frac{12+5a}{13\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow 13(3+4a) = 5(12+5a)$$

$$\Rightarrow 39+52a = 60+25a \Rightarrow 52a-25a = 60-39 \Rightarrow 27a = 21$$

$$\Rightarrow a = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \Rightarrow a = \frac{7}{9}$$

مثال(17- 3): على اعتبار أن

$$\|\vec{a}\| = 2, \|\vec{b}\|, \vec{a}-\vec{b} = 3\overline{e_1} - 5\overline{e_2}$$

احسب الضرب الداخلي للمتجهين $\vec{a}.\vec{b}$.
الحـــل: نعلم أن .

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}.\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \|b\|^2$$

$$3^2+5^2 = 2^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + 7^2 \Rightarrow 34 = 53 - 2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b} = 53 - 34 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \frac{19}{2}$$

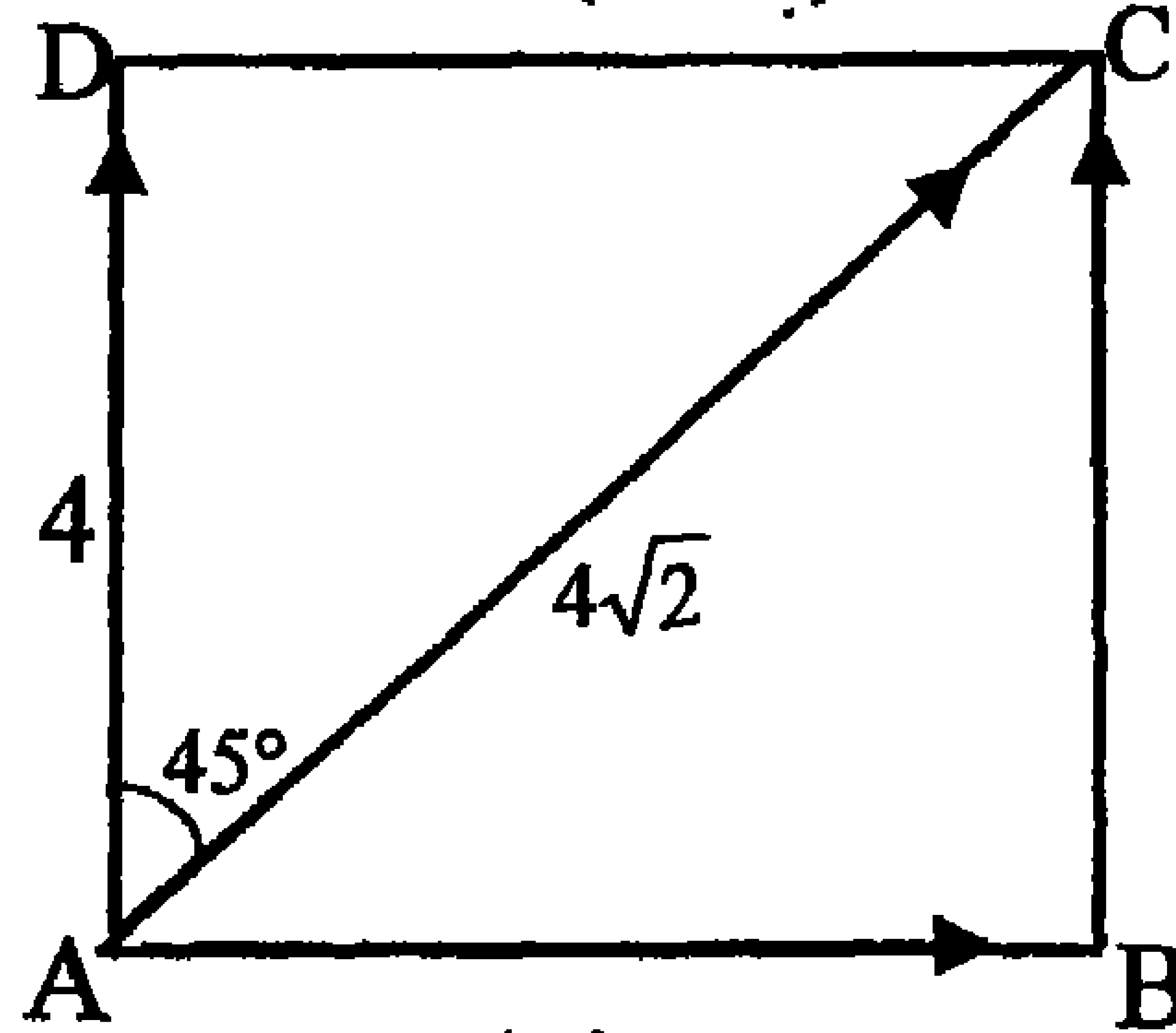
مثال(18- 3): في المربع ABCD إذا كان

$$|AB| = 4cm$$

فاحسب

$$\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

الحـــل: نلاحظ من الشكل (17- 3) أن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



شكل(17- 3)

وعليه فإن حاصل الضرب الداخلي المطلوب هو

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| Cos 45°$$

$$= 4.4\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

مثال(19- 3): في الشكل (18- 3) المثلث ABC مثلث قائم الزاوية إذا كان

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}|AC|، |\overrightarrow{BC}| = 12، |\overrightarrow{AB}| = 9$$

احسب الضرب الداخلي $\overrightarrow{AC} . (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

الحـــل:

$$\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$$

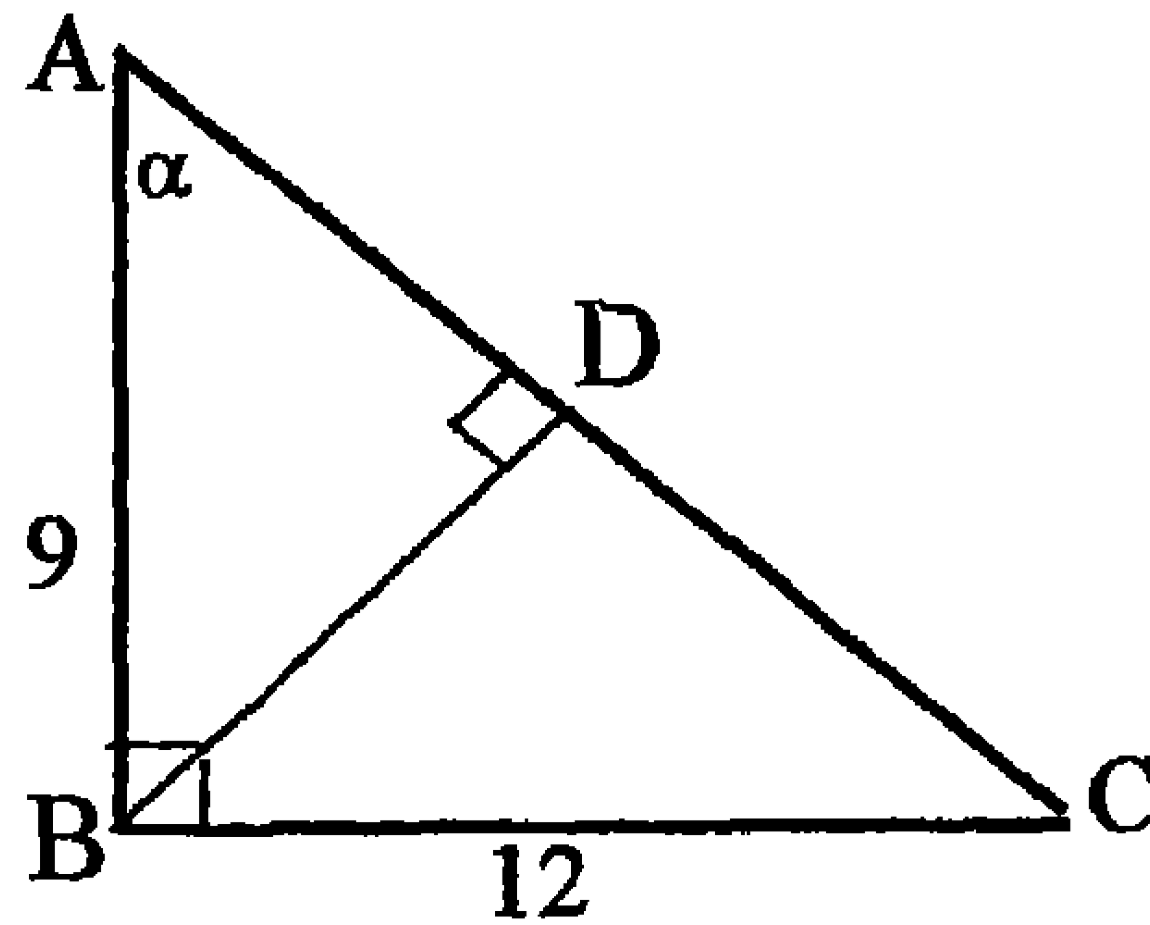
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{AB}\| Cos\alpha + \|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{AD}\| Cos 0°$$

$$\Rightarrow \|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 \Rightarrow \|AC\| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15,$$

$$\Rightarrow \|AD\| = \frac{\|AC\|}{3}$$

حسب المعطى فإن .

$$\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 15.9.\frac{9}{15} + 15.5 = 81 + 75 = 156$$



شكل(18- 3)

مثال(20- 3): لدينا المتجهين $\vec{b}$, $\vec{c}$ متجهي وحدة وكانت الزاوية بينهما 120° وكان المتجهين $\vec{a}$, $\vec{b}$ متعامدين احسب $\vec{b}\,.\,(\vec{a} - 2\vec{c}\,)$

الحل: بما أن المتجهين $\vec{b}$, $\vec{c}$ متجهي وحدة فإن.

$$\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$$

وبما أن $a \perp b$ فإن. $a\,.\,b = 0$ وعليه فإن .

$$\vec{b}.(\vec{a} - 2\vec{c}) = \vec{b}.\vec{a} - 2\vec{b}.\vec{c} \Rightarrow 0 - 2\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|Cos(\vec{b},\vec{c})$$

$$\Rightarrow -2.1.1Cos120° \Rightarrow -2.\left(\frac{-1}{2}\right) = 1$$

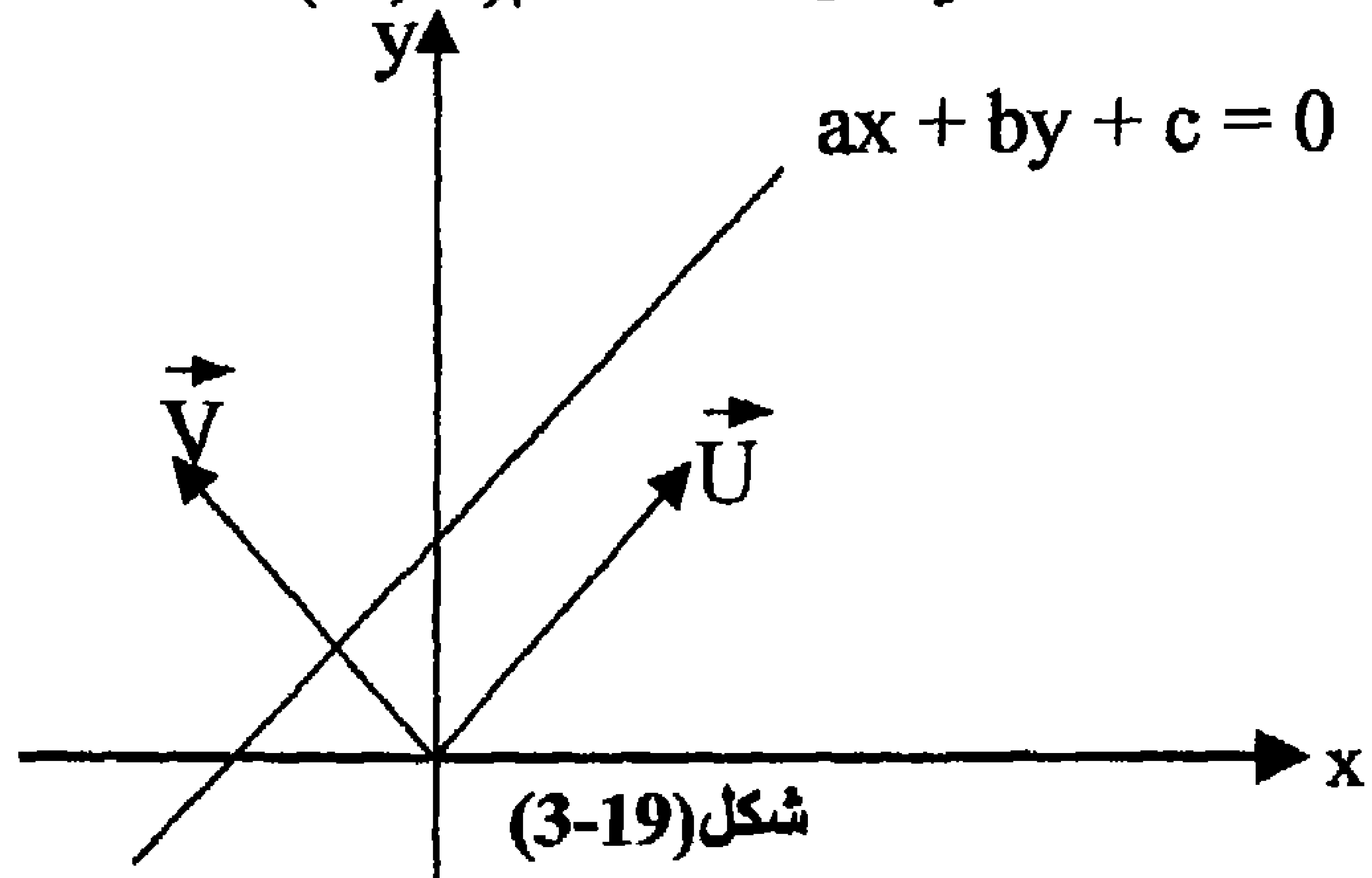
14- 3 المتجهات الموازية أو العمودية على خط مستقيم :

في أي مستوى إحداثي إذا كان لدينا خط مستقيم معادلته:
$ax + by + c = 0$ فلكل

$$k \in R - \{0\}$$

فإن المتجه الموازي لهذا الخط المستقيم والموضح بالشكل (19- 3)
هو $\vec{U} = k\,(\,-b\,,\,a\,)$

بينما المتجه العمودي على هذا المستقيم$\vec{V} = k(a , b)$



شكل(3-19)

مثال(21- 3): أوجد متجه الوحدة العمودي على المستقيم الذي معادلته:

$$x + \sqrt{3}y = 1$$

الحل: إن المتجهات العمودية على الخط المستقيم الذي معادلته :

$$x + \sqrt{3}y = 1$$

وعلى اعتبار أن $k \neq 0$ هي .

$$\vec{V} = k(1, \sqrt{3}) = (k, \sqrt{3}k)$$

ويما أن المتجه الذي نبحث عنه هو متجه وحدة فإن.

$$\|\vec{V}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{k^2} + (\sqrt{3}k)^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 3k^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{4k^2} = 1 \Rightarrow -2k = 1 \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

وعليه فإن متجهات الوحدة المطلوبة هي.

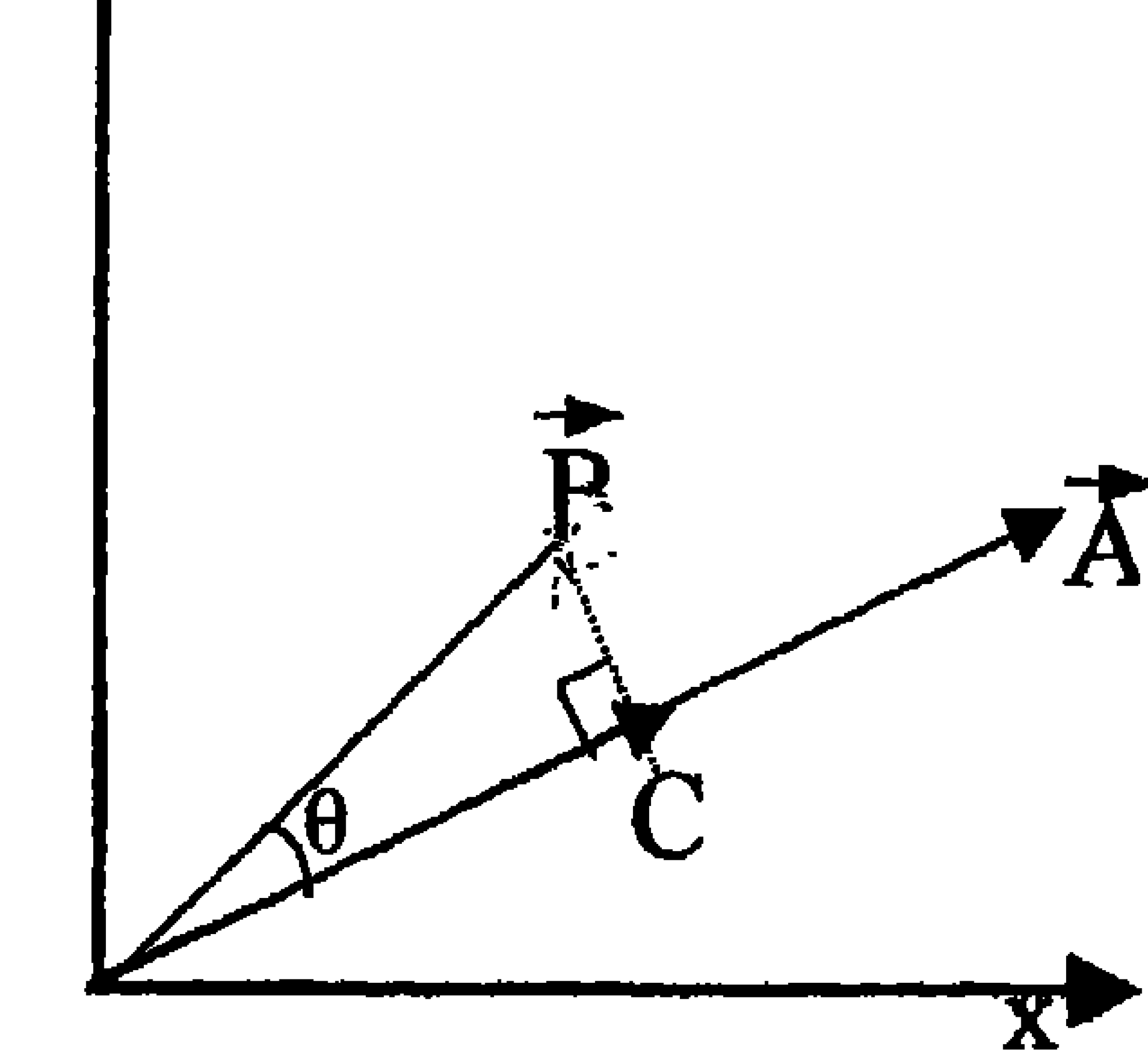
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

15- 3 مسقط المتجه:

لدينا المتجه $\vec{B}$ والمتجه $\vec{A}$ واللذان يحصران الزاوية θ بينهما فإن مسقط المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ وبنفس الاتجاه هو المتجه $\vec{C}$ الواقع على المتجه $\vec{A}$ والذي يمكن إيجاده من العلاقة التالية:

$$\vec{C}=\frac{\vec{A}.\|\vec{B}\|}{\|\vec{A}\|}Cos\theta$$

والشكل (20- 3) يوضح هذا المفهوم .



شكل(20- 3)

مثال(22-3): لدينا المتجه $\vec{p}=(2,3)$ أوجد مسقط هذا المتجه العمودي على المتجه $\vec{k}=(5,1)$.

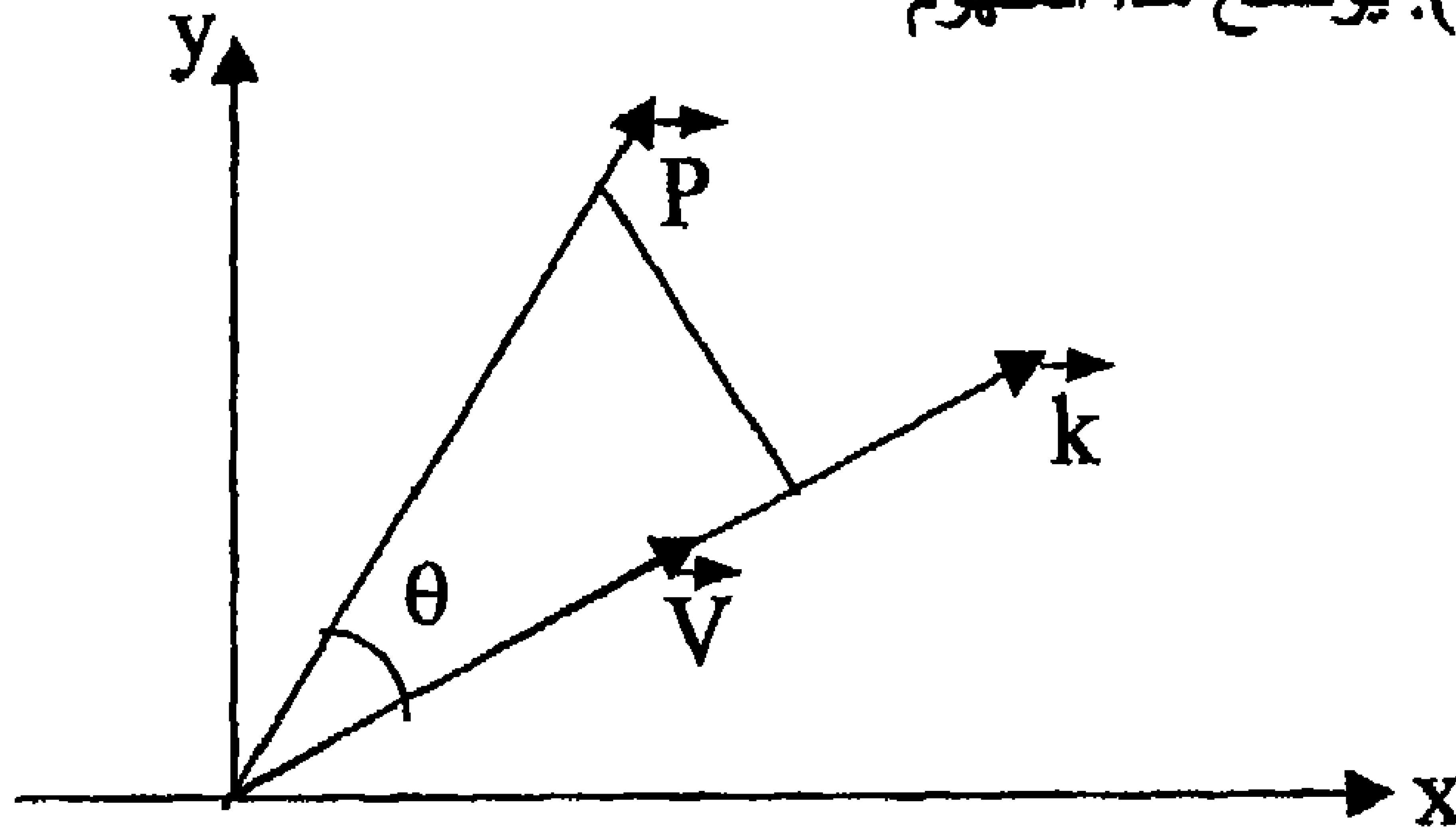
الحل: ليكن المتجه المراد إيجاده هو V وبتطبيق القاعدة أعلاه فان

$$\vec{V}=\frac{\vec{k}\|\vec{P}\|Cos\theta}{\|\vec{k}\|},\|\vec{P}\|=\sqrt{4+9=\sqrt{13}},\|\vec{k}\|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$

$$Cos\theta=\frac{\vec{p}.\vec{k}}{\|\vec{p}\|.\|\vec{k}\|}=\frac{2.5+1.3}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

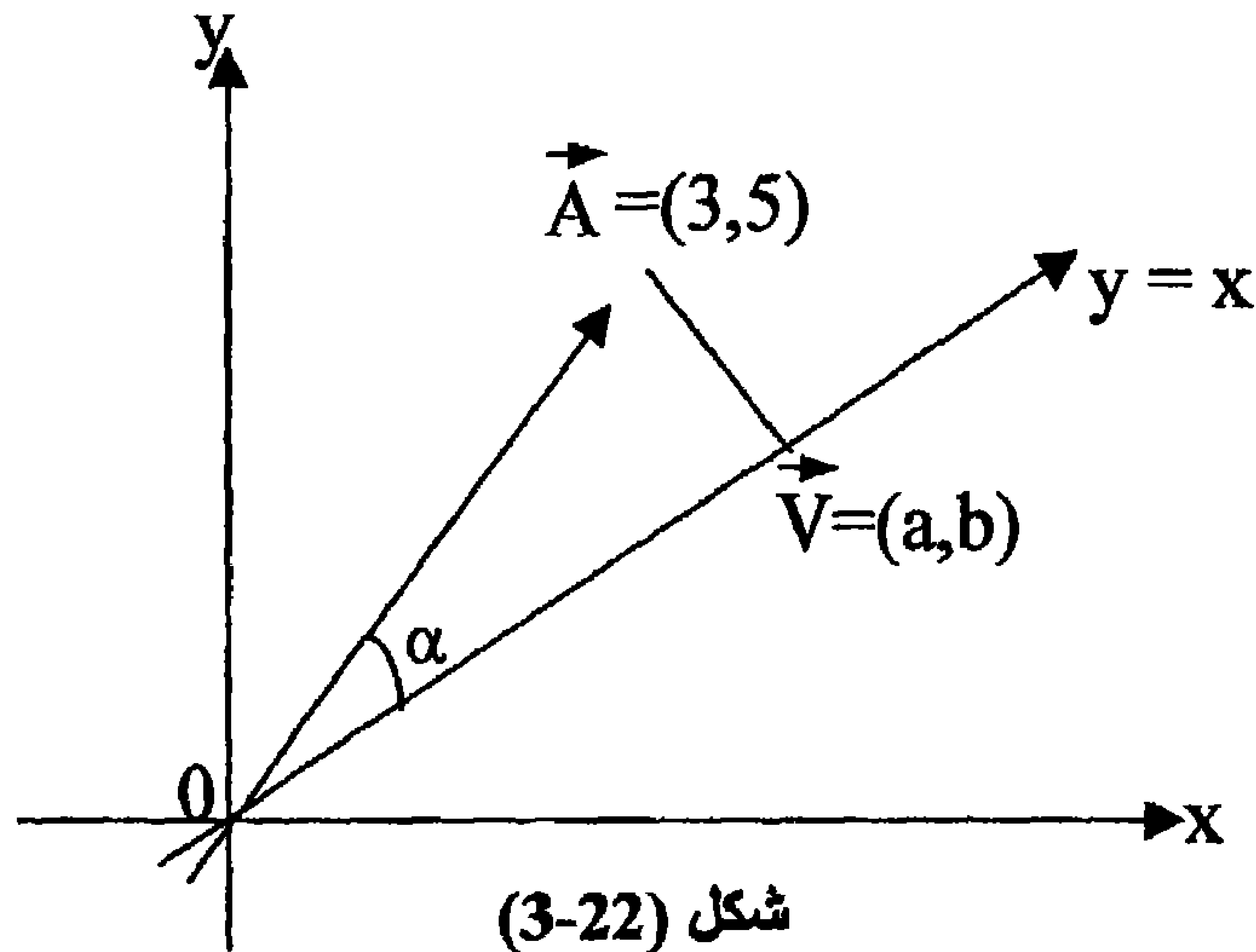
$$\Rightarrow\vec{V}=\frac{(5,1).\sqrt{13}.\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{26}}=(5,1).\frac{1}{2}=\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

والشكل(3-21): يوضح هذا المفهوم



شكل(3-21)

مثال(3-23): أوجد المسقط العمودي للمتجه $\vec{A}=(3,5)$
على المستقيم الذي معادلته $y = x$.
الحل: الشكل(3-22) يوضح الحل



شكل (3-22)

ليكن مسقط المتجه $\vec{A}=(3,5)$ على الخط المستقيم $y=x$ هو $V=(a,b)$
ولكون $y = x$ إذن $a = b$ وبالتالي فان

$$\vec{A}.\vec{V} = \left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{V}\right\| Cos\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{A}.\vec{V} = \|\vec{A}\|\|\vec{V}\|.\frac{\|\vec{V}\|}{\|\vec{A}\|} = \|\vec{V}\|^2$$

وبالتعويض عن قيم المتجهين $\vec{A},\vec{V}$

$$\Rightarrow (3,5).(a.a) = (\sqrt{a^2 + a^2})^2$$
$$\Rightarrow 3a + 5a = 2a^2$$
$$\Rightarrow 8a = 2a^2 \Rightarrow 2a^2 - 8a = 0$$
$$\Rightarrow a(a-4) \Rightarrow a = 0, a = 4$$

ويكون المتجه الذي نبحث عنه هو $\vec{V}=(4,4)$

3-16 المتجه ذي الثلاثة أبعاد Three dimensional Vector

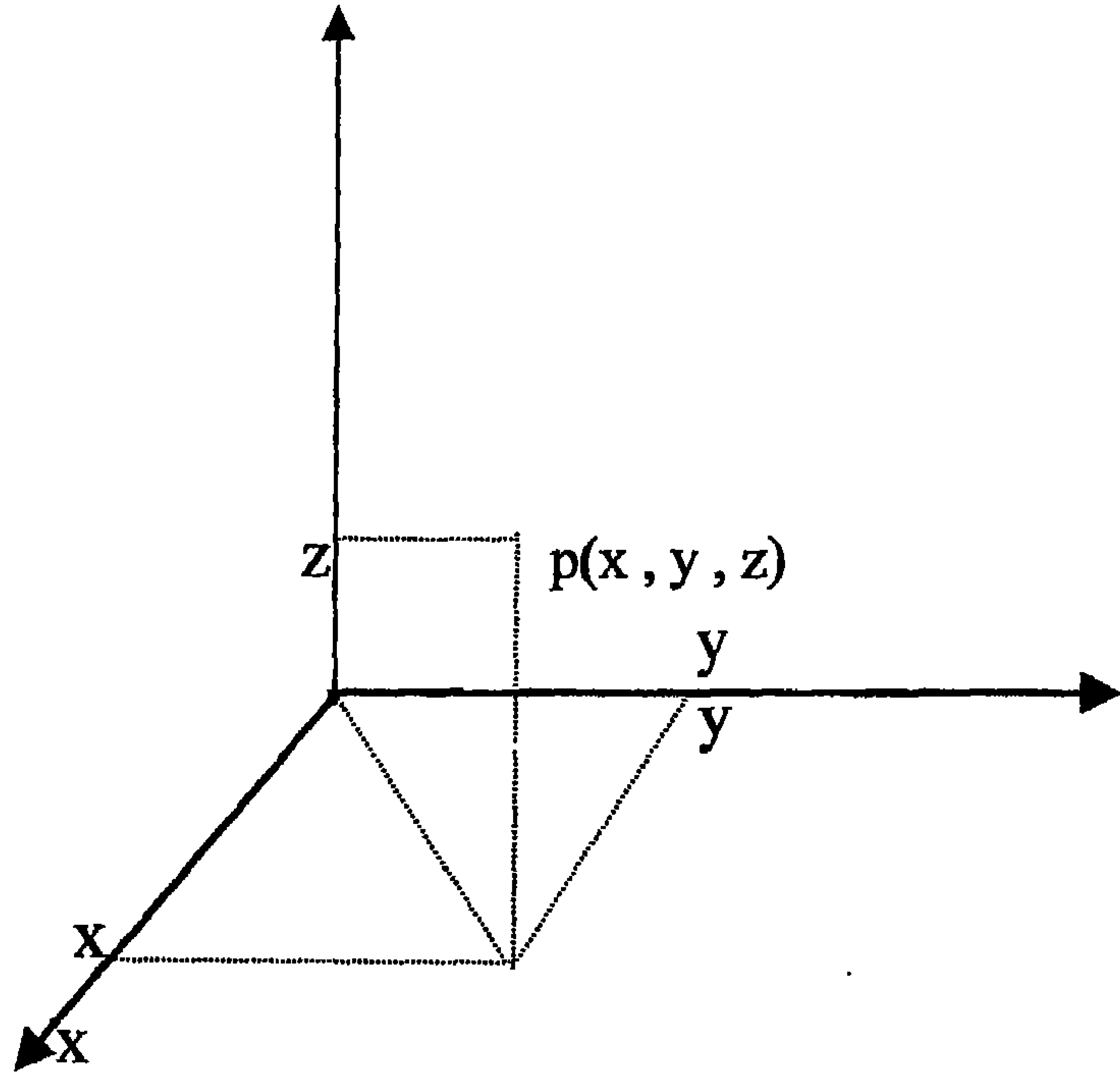
لقد سبق وسمينا مجموعة النقاط المتشكلة من الأزواج المرتبة بالمستوى والتي عبرنا عنها بالرموز

$$R^2 = \{(x,y) : x, y \in R\}$$

أما الآن سنسمي مجموعة النقاط المتكونة من الثلاثي المرتب بالفضاء وسنعبر عن الفضاء بالرموز على النحو

$$R^3 \{(x,y,z) : x, y, z \in R\}$$

أما بالنسبة لتحديد نقطة في الفضاء فننطلق من نقطة الأصل $O(0\ ,0\ ,0)$ ثم تحديد ثلاثة محاور متعامدة كما هو مبين في شكل (23- 3) هي على التوالي. محور السينات $(x\ ,0\ ,0)$ ومحور الصادات $(0\ ,y\ ,0)$ ومحور الزينات $(0\ ,0\ ,z)$ وعليه فتتعين النقطة $P(x\ ,y\ ,z)$



شكل(23- 3)

في مجموعة R^3 إذا أخذت النقاط التالية :

$p(x, y, z)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$

فإن خصائص النظام على النحو التالي:

$$1)\overrightarrow{op} = \vec{p} = (x, y, z)$$

$$2)\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$3)\left\|\vec{p}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$4)k \in R \Rightarrow k\vec{P} = k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

$$5)\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$6)\vec{A}.\vec{B} = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1.z_2$$

ملاحظة: في مجموعة R^3فان المتجهات التالية :

$$\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)$$

جميعها متجهات وحدة.

مثال(24- 3): لدينا المتجهين

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}-4\\3\\5\end{bmatrix}$$

احسب

$$\left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|$$

الحـــل:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(1,2,3)=(4,-3,-5)=(1+4,2-3,3-5)=(5,-1,-2)$$

وعليه فإن طول المتجه المطلوب

$$\left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{25+1+4}=\sqrt{30}$$

مثال(25- 3): لدينا النقاط $A=(1,-2,3)\quad,B=(0,5,2)$
في المجموعة R^3 أوجد

$1)\ \overrightarrow{AB} \qquad 2)\ \vec{A}+3\vec{B}$

الحـل:

$$1)\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=(0,5,2)-(1,-2,3)=(0-1,5+2,2-3)=(-1,7,-1)$$

$$2)\vec{A}+3\vec{B}=(1,-2,3)+3(0,5,2)=(1,-2,3)+(0,15,6)$$

$$=(1+0,-2+15,3+6)=(1,13,9)$$

مثال(26- 3): لدينا المتجهين

$$\vec{A}=(1,1,0),\vec{B}=(0,1,1)$$

في R^3 والمطلوب إيجاد مقدار الزاوية بين المتجهين $\vec{A},\vec{B}$.

الحل: من علاقة $\cos\theta$ للزاوية

$$Cos\,\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}\right\|}=\frac{0+1+0}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{0+1+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=60^\circ$$

3 -17 فضاءات المتجه الحقيقي Real Vector Spaces :

تعريف(4-3): لتكن المجموعة V مجموعة ليست خالية ،

$$\forall x, y \in V, f(x,y) = x + y \in V$$

ولتكن عملية الجمع المعرفة ،

$$\forall x \in V, \forall k \in R, g(k,x) = kx$$

أي عملية الضرب المعرفة معطاة أيضا فإذا كانت العمليتان تحققان الفرضيات التالية .

1) النظام (+ , V) زمرة إبدالية

$$2-a)\forall x, y \in V, \forall k \in R \Rightarrow k(x+y) = kx + ky$$

$$b)\forall x \in V, \forall k, r \in R \Rightarrow (k+r)x = kx + rx$$

$$c)\forall x \in V, \forall k, r \in R \Rightarrow k(rx) = (kr)x$$

$$d)\forall x \in V, 1 \in R \Rightarrow 1.x = x$$

فإنه يقال للمجموعة V بأنها فضاء المتجه على حقل الأعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز V(R) ويقال لعناصر (R) في V(R) بأنها أعداد ثابتة بينما لعناصر المجموعة V متجهات .

مثال(27- 3): إذا كان $n \in N^+$ وأخذنا عنصرين من عناصر الفضاء المتجه R^n على النحو

$$y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)، x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$$

وعلى اعتبار أن $k \in R$ عرفت عمليتا الجمع والضرب على التوالي على النحو

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n), kx = (kx_1, kx_2, \ldots\ldots, kx_n$$

بين أن R^n على R بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب تشكل فضاء متجه.

الحل: نبدأ بالتحقق من الفرضيات الواردة في التعريف .

1) نتحقق من أن النظام (R^n , +) هو زمرة إبدالية.

$$a)x + y = (x_1 + y_2, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n) \in R^n$$

وهذا يعني أن عملية الجمع بالنسبة لـــ R^n مغلقة .

$$b)(x+y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$$

$$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots\ldots, x_n + y_n + z_n)$$

$$= x + (y + z)$$

وهذا يعني أن عملية الجمع تحقق خاصية التجميع على R^n ولكون

$0 = (0,0,....,0) \in R^n, 0 + x = x + 0 = x$

فإننا نقول بأن R^n تمتلك العنصر المحايد الجمعي وهو 0 ولكون

$d)(-1)x = -x, \bar{x} + (-x) = -x + x = 0$

فإننا نقول بأن R^n تمتلك العنصر العكسي لكل عنصرين من عناصرها

$$e) x + y = (x_1 + y_2, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n$$
$$= y + x$$

فإننا نقول بأن R^n تمتلك خاصية الإبدال بالنسبة لعملية الجمع ولتوفر الشروط السابقة فإننا نقول بأن النظام $(R^n, +)$ يشكل زمرة إبدالية .
والآن نبدأ بالتحقق من الشروط الواردة في البند الثاني .

$$2-a) k(x + y) = k(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$= (kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2, ..., kx_n + kx_n)$$
$$= (kx_1, kx_2, ..., kx_n) + (ky_1, ky_2, ..., ky_n)$$
$$= kx + ky$$

$$b) \forall k, r \in R \Rightarrow$$
$$(k + r)x = (k + r).(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$= (k + r)x_1, (k + r)x_2, ..., (k + r)x_n)$$
$$= (kx_1, kx_2, ..., kx_n) + (rx_1, rx_2, ..., rx_n)$$
$$= kx + rx$$

$$c) \forall k, r \in R \Rightarrow$$
$$(k.r)x = (kr)(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$= (krx_1, krx_2, ..., krx_n)$$
$$= k(rx).$$

$$d) 1.x = 1(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$= (1.x_1, 1.x_2, ..., 1.x_n)$$
$$= x_1, x_2, ..., x_n = x$$

وعليه فإن المجموعة R^n على R تشكل فضاء متجه وهو المطلوب.

ملاحظـــات:

1) لتكن مجموعة جميع متتاليات الأعداد الحقيقية A تعتبر A على حقل الأعداد الحقيقية فضاء متجه.

2) تعتبر (+ , R) المعرفة على مجموعة الأعداد النسبية Q فضاء متجه .

3) تعتبر المصفوفات ذات الرتبة الواحدة وعملية الجمع على المتجهات المضروبة بعدد ثابت فضاء متجه.

4) تعتبر مجموعة جميع معاملات كثيرات الحدود على حقل الأعداد الحقيقية هي فضاء متجه.

5) تعتبر مجموعة الإقترانات الحقيقية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية ضمن الفترة المغلقة [a , b] هي فضاء متجه.

6) مجموعة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع والمعرفة على R هي فضاء متجه.

18- 3 فضاء المتجـه الجزئـي :

إذا كانت A , V مجموعتين بحيث أن $A \subset V$ فإننا نسمي المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة V وإذا حصل وان كانت Vعلى حقل الأعداد الحقيقية R فضاء متجها وكانت المجموعة A على حقل الأعداد الحقيقية R فضاء متجهـــا فإننا نسمي الفضاء المتجه A فضاء متجها جزئيا من الفضاء المتجهV وبشكـــل عام نعطـي التعريـف التالـي :

تعريف(5- 3): إذا كان النظام (. , + , V) فضاء متجها وكانت المجموعة $A \subset V$ ، $A \neq \emptyset$ فـــإن النظـــام (A , + , 0)، فضاء متجها من الفضاء المتجه (V , + , 0) إذا تحققت جميع شروط الفضاء المتجـه فـــي النظـــام(.,+,A)

نتـــائـــــج:

1) كل فضاء متجه V هو فضاء جزئي من نفسـه .

2) على اعتبار أن المتجه الصفري $\vec{0}$ هو عنصر من فضاء المتجه $\vec{V}$ فالمجموعـة { 0 } هي عنصر من فضاء المتجه V وبالتالي فالمجموعة { 0 } تعتبر فضاء متجه جزئي من فضاء المتجه $\vec{V}$.

نظريــــــة(2- 3): إذا كان V فضاء متجه على حقل الأعداد الحقيقية R ولتكن $A \subset V$ ،وحتى تكون المجموعة A فضاء متجه جزئي منV فإن الشرط الواجب والكافي هـو :

$$1)\forall x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$$
$$\forall k \in A, \forall x \in A \Rightarrow kx \in A$$

البرهان: افرض أن A مجموعة جزئية غير خالية من V بحيث يكون

$1)\forall x, y \in A, x+y \in A.$

$2)\forall k \in R, x \in A,, kx \in A$

والآن يمكن أن نثبت أن هذين الشرطين كافيين لجعـــل A فراغا متجها
بما أن A مجموعة غير خالية فإنه يوجد عنصر ما مثل $x \in A$
وباستخدام الشرط الثاني فإن :

$$(-1).x = -x \in A$$

وباستخدام الشرط الأول نحصل على .

$$x + (-x) = 0 \in A$$

أي أصبحت A تحتوي على العنصر الصفري وإنه لكل عنصر منها يوجد نظير
وما تبقى من فرضيات ضرورية للفضاء المتجه لا ضرورة للتحقق منها
حيث هي خصائص لعمليتي الجمع والضرب العددي وهي متوفـرة أصـــلا فـي
الفضاء المتجه V فمثلا إذا كان

$$\forall x, y \in A \Rightarrow x, y \in V \Rightarrow x + y = y + x$$

لأن V فضاء متجه وبنفس الأسلوب يمكن التحقق من بقية الفروض
الضرورية بجعل A فضاء متجها وإذا فرضنا أن (A,+,.) فضاء متجها
جزئيا من الفضاء المتجه V فإنه يفهم ضمنا أن عمليتي الجمع والضرب
العددين معرفتـــان على A وفي هذا إشارة إلى توفر الشرطين.

$1)\forall x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$

$2)\forall k \in R, x \in A, kx \in A$

وبذلك فإن (A , + 0) فضاء متجه جزئي إذا وفقط إذا تحقق الشرطان أعلاه.

مثال(28- 3): لتكن

$$A = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in R^2, x_1 - 2x_2 = 0\}$$

أثبت أن المجموعة A هي فضاء متجه جزئي من الفضاء المتجه R^2 .

الحــــــل: لإثبات ذلك نبدأ بالتحقق من الشرطين لأن يكون فضاء متجه هو فضاء متجه جزئي من فضاء متجـــه آخر .
ليكن :

$1)\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$

$\Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0, y_1 - y_2 = 0$

$$\Rightarrow x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) = 0$$

وعند تطبيق الشرط الأول فان

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\Rightarrow x_1 + y_1 - 2(x_2 + y_2) = (x_1 - 2x_2) + (y_1 - 2y_2)$$
$$\Rightarrow 0 + 0 = 0 \in A \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in A$$

وعليه فان الشرط الأول محقق

$$2) \forall k \in R, \forall (x_1, x_2) \in A$$
$$\Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0, k(x_1 - x_2) = 0$$
$$\Rightarrow kx_1 - 2kx_2 = 0$$
$$\Rightarrow (kx_1, kx_2) \in A$$
$$\Rightarrow k(x_1, x_2) \in A$$

فإن الفضاء المتجه A هو فضاء متجه جزئي من الفضاء المتجه V وهو المطلوب .

مثال(29- 3): لتكن A مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية التي مسقطها الأول صفر ، أي أن

$$A = \{0,2y) : y \in R\}$$

أثبت أن A مع عملية جمع الأزواج المرتبة وعملية ضرب الأزواج المرتبة بعدد حقيقي تشكل فضاء متجها جزئيا مع مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية V.

الحـــــل: حتى تكون المجموعة A فضاء متجها جزئيا من V لا بد من التحقق من الشرطين التاليين:

a) $A \subseteq V$ وهذا متحقق لأن جميع الأزواج المرتبة في A موجودة في V.

b) بقي علينا التأكد من أن A تمثل فضاء متجها وهنا لا بد من التحقق من شروط الفضاء المتجه على النحو التالي:

$$1)(0,2y_1) + (0,2y_2) = (0,2y_2) + (0,2y_1)$$

$$2)(0,2y_1)+[(0,2y_2)+(0,2y_3)]=[(0,2y_1)+(0,2y_2)]+(0,2y_3)$$

وهذا ما يحقق خاصية التجميع

$$3)(0,0)+(0,2y)=(0,2y)+(0,0)=(0,2y)$$

وهذا ما يحقق خاصية الإبدال

يوجد عنصر صفري في A هو (0 , 0) بحيث أن لكل زوج مرتب(0,2y) في A يوجد زوج مرتب آخر في A وهو ما يعاكســه في الإشـــارة وهو ما نســميه الزوج النظير الجمعي بحيث أن

$$(0,2y)+(0,-2y)=(0,-2y)+(0,2y)=(0,0)$$

$$5)\forall k\in R\Rightarrow k[(0,2y_1)+(0,2y_2)]=k(0,2y_1)+k(0,2y_2)$$

$$6)\forall k_1,k_2\in R\Rightarrow (k_1+k_2).(0,2y)=k_1(0,2y)+k_2(0,2y)$$

$$7)\forall k_1,k_2\in R\Rightarrow (k_1.k_2).(0,2y)=k_1[k_2(0,2y)$$

$$8)1.(0,2y)=(0,2y)$$

ولتحقق الشروط أعلاه نقول أن A تشكل فضاء جزئيا من V.

مثـــال(30- 3): لتكـن V هـي الفضـــاء المتجــه R×R ولتكــن A ⊂ V بحيث أن

$$A=\{(x,5x):x\in R\}\quad ،\quad V=\{(x,y)\in R:y=5x\}$$

اثبت أن A فضاء متجه جزئي (فضاء خطي جزئي).

الحـــــل: حسب النظرية أعلاه نتحقق من الشرطين التاليين

إذا كان

$$1)(x,5x)\in A,(y,5y)\in A\Rightarrow (x,5x)+(y,5y)$$
$$\Rightarrow (x+y,5x+5y)=(x+y,5(x+y)$$
$$\Rightarrow (z,5z)\in A:z=x+y$$

إذا كان

$$2)k\in R,(x,5x)\in A\Rightarrow k(x,5x)=(kx,5kx)$$
$$\Rightarrow (z,5z)\in A:z=kx$$

وعليه ولتحقق الشرطين أعلاه فإن A تعتبر فضاء خطي جزئي من الفضاء V وهو المطلوب .

مثــال(31- 3): بمعلومية أن المجموعة A هي فضاء جزئي من الفضاء R^2 حيث

$$A=\{\vec{u}:\vec{u}=(x,y),x+2y=0,x,y\in R\}$$

وإذا كان لدينا المتجهات

$$\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(-2,4),\vec{c}=(6,-6)$$

فأي من العبارات التالية صحيحة :

$A)\vec{a}\in A$ $B)\vec{a}+\vec{b}\in A$ $C)2\vec{b}\in A$

$D)\vec{b}+\vec{c}\in A$ $E)\vec{a}+\vec{c}\in A$

الحـــــل: حتى يكون أي من الإجابات صحيحة فإنه يتوجب تحقق A أي x + 2y = 0
وبعد تجريب الإجابات جميعها نجد أن أنسب الإجابات هو D لأن

$$\vec{b}+\vec{c}=(-2,4)+(6,-6)=(4,-2)$$

وبالتعويض عن x , y في المعادلة

$$x+2y=4+2(-2)=0$$

ملاحظـات:

1) إذا كانت A مجموعة جميع متتاليات الأعداد الحقيقية والمجموعة B هي مجموعة تقاربات المتتاليات في A فإن المجموعة B هي فضاء متجه جزئي من المجموعة A .

2) المجموعة

$$A=\{\vec{u}:\vec{u}=(x,-x),x\in R\}$$

تعتبر فضاء جزئيا من المجموعة R^2.

3) المجموعة

$$A=\{(x,y,z)\in R^3:a,b,c\in R,ax+bx+cz=0\}$$

هي فضاء متجه جزئي من الفضاء المتجه R^3 .

4) مجموعة حل نظام المعادلات المتجانسة P^3هو فضاء متجه جزئي من R^3 .

5) المجموعتان

$$A=\{(x,y)\in R^2:a\in R,y=ax\},B=\{(x,ax):a\in R\}$$

هما فضاء متجه جزئي من R^2 .

نظريــة(3- 3): إذا كان (. , + , V) فضاء متجها وكان كل من

$(A_1 , + , .)$ ، $(A_2 , + , .)$ فضاء متجها جزئيا من الفضاء المتجه $(V , + , .)$ فإن $(A_1 \cap A_2 , + ,.)$ فضاء متجها جزئيا من الفضاء $(V , + , .)$.

البرهـان: نفرض أن

$$x, y \in A_1 \bigcap A_2 \Rightarrow x, y \in A_1, x, y \in A_2$$

وبما أن كل من A_1 , A_2 فضاء متجه جزئي من الفضاء V وبالتالي فإن

$$x + y \in A_1, kx \in A_1, \forall x, y \in A_1, k \in R$$

وكذلك

$$x + y \in A_2, kx \in A_2, \forall x, y \in A_2, k \in R$$

أي أن

$$x + y \in A_1 \bigcap A_2, \forall k \in R, x, y \in A_1 \bigcap A_2$$

وحسب النظرية فإن

$$(A_1 \bigcap A_2, +, .)$$

فضاء متجه جزئي من V و هو المطلوب.

3-19 الارتباط والاستقلال الخطي للمتجهات :

تعريف(6- 3): ليكن V هي مجموعة متجهات وليكن $v_1 , v_2 , ... , v_n$ متجهات مختلفة عن بعضها البعض فيV وعلى اعتبار أن

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$$

$a_1 , a_2 , ... , ak$ أعداد حقيقية مختلفة عن الصفر وإذا كان
فإننا نقول للمتجهات $v_1 , v_2 , ... , v_k$
بأنها متجهات مستقلة ويقال للمجموعة

$$V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

بمجموعة المتجهات المستقلة خطيا.

تعريـف(7- 3): إذا كان

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_k v_k = 0$$

وكانت

$$a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_k$$

أعدادا حقيقية بينها عدد واحد على الأقل لا يساوي الصفر فإنه يقال للمتجهات $v_1 , v_2 , \dots , v_k$ مرتبطة خطيا ويقال للمجموعة

$$\{v_1, v_2, \dots\dots\dots\dots, v_k\}$$

بمجموعة المتجهات المرتبطة خطيا.

تعريف(8- 3): لأي مجموعة متجهات إذا لم تكن مرتبطة خطيا فإنها تكون مستقلة خطيا والعكس صحيح.

مثال(32- 3): إذا كانت

$$A = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

مجموعة جزئية على R^2 ابحث في كون A مستقلة خطيا أم مرتبطة خطيا.

الحــــــل: ليكن

$$\vec{0} = (0,0,0) \in R^3 ، \ a_1, a_2, a_3 \in R$$

وليكن

$$a_1(1,1,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

ومن هذه المساواة نحصل على

$$a_1 = 0, a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

وذلك بالتعويض عن قيمة $a_1 = 0$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

وبما أننا حصلنا على قيمة الثوابت

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

فإننا نقول عن المجموعة A بأنها مجموعة المتجهات المستقلة خطيا.

مثال(33- 3): لدينا المتجهات التالية:

$$\vec{A} = (-3,1,0), \vec{B} = (-1,4,-3), \vec{C} = (-2,-3,3)$$

في R^3 بين أن المتجهات الثلاث مرتبطة خطيا.

الحل: على اعتبار أن

$$a_1, a_2, a_3 \in R, \vec{0} = (0,0,0) \in R^3$$

ولتكن المساواة

$$a_1(-3,1,0) + a_2(-1,4,-3) + a_3(-2,-3,3) = (0,0,0)$$

ومن هذه المساواة فإن

$$-3a_1 - a_2 - 2a_3 = 0, a_1 + 4a_2 - 3a_3 = 0, -3a_2 + 3a_3 = 0$$

ونكون لهذا النظام مصفوفة ثوابت ثم نجد محدد هذه المصفوفة فإذا كان هذا المحدد مساويا للصفر معنى ذلك أن المتجهات مرتبطة خطيا وبالتالي فإن المتجهات المعطاة مرتبطة خطيا وهو المطلوب.

نظرية(4- 3): ليكن V فضاء متجه وليكن

$$\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_k\} \subset V$$

فإذا كان

$$\vec{0} \in \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$$

فإننا نقول للمتجهات $v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_k$ متجهات مرتبطة خطيا.

مثال(34- 3): بين أن المجموعة

$$\{(3,-1),(0,0)\}$$

والتي هي محتواة في R^2 مرتبطة خطيا؟

الحل: لاحتواء المجموعة على متجه صفري وحسب النظرية أعلاه فإن المجموعة مرتبطة خطيا.

نظرية(5- 3): إذا كان أحد عناصر المجموعة

$$\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, v_k\}$$

هو تركيب لباقي العناصر فإنها تكون مرتبطة خطيا

مثال(35-3): لتكن المجموعة

$$A = \{(2,1,0),(0,3,1),(4,5,1\}$$

مجموعة جزئية من الفضاء R^3 فهل هذه المجموعة مرتبطة خطياً

الحل: نعم لأن المتجه (4,5,1) هو تركيب خطي لباقي المتجهات على النحو التالي

$$(4,5,1) = 2(2,1,0) + 1(0,3,1)$$

نظرية(6- 3): إذا كانت لدينا مجموعة غير خالية وجزئية من المجموعة

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

وكانت هذه المجموعة مرتبطة خطيا فإن المجموعة

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

تكون مرتبطة خطيا أيضا.

نظريــة(7- 3): إذا كانت المجموعة

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

مستقلة خطيا فإن كل مجموعة جزئية غير خالية لهذه المجموعة مستقلة أيضا.

مثــال(3-36): لتكن المجموعة

$A = \{(2,1,0), (0,2,-2), (1,1,1)\}$

مجموعة جزئية من R^3 وإن هذه المجموعة مستقلة خطيا فهل المجموعة الجزئية

$\{(1,1,1)، (2,1,0)\}$

منها مستقلـــة خطيا

الحــــل: نطبق شروط الاستقلال الخطي

$$a_1(1,1,1) + a_2(2,1,0) = (0,0,0)$$
$$a_1 + 2a_2 = 0$$
$$a_1 + a_2 = 0$$
$$a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة فإن$a_2=0$ ∴ فالمجموعة مستقلة خطيا وهذا ما يؤكد صحة النظرية.

3-20 قاعدة وبعد فضاء المتجه

Base and diminsion of vector space

تعريف(9- 3): ليكـن لدينـا فضـاء المتجـه V وعلـى اعتبار أن

$\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$

فإذا كانت المجموعة

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

تولد فضـاء المتجـه V وكان الفضاء V مستقل خطيا فإن المجموعة

$$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

تسمى أساس فضاء المتجه V ويسمى عدد المتجهات في مجموعة الأساس ببعد فضاء المتجه ويرمز له بالرمز dim (V) إذا كانت المجموعة هي قاعدة فضاء المتجهV وعلى اعتبار أن:

$$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

$$a_1, a_2, ..., a_k \in R$$

فإن عناصر المجموعة $\vec{A}$ والمتجهات v_k , ... , v_2 , v_1 هي تركيب خطي يمكن كتابته على الصورة:

$$A = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_k v_k$$

ملاحظات هامة:

1) إذا كان عدد عناصر المجموعة

$$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

مساويا لبعد فضاء المتجه فإن مركبات الصف أو العمود تشكل محددة .

a) إذا كانت قيمة المحدد مساوية للصفر فإن المجموعة V مرتبطة خطيا والمتجهات لا تولد الفضاء.

b) إذا كانت قيمة المحدد لا تساوي الصفر فإن المجموعة V مستقلة خطيا والمتجهات تولد الفضاء V.

2) يمكن أن يكون للفضاء المتجه قواعد مختلفة لكن لكل قاعدة لفضاء المتجه يوجد نفس العدد من المتجهات .

3) جميع المتجهات المستقلة خطيا في أي فضاء متجه هي قاعدة لهذا الفضاء .

4) تعتبر المتجهات $\vec{e_1} = (1, 0)$ ، $\vec{e_2} = (0 , 1)$ والمجموعة المكونة لهما $\{\vec{e_1} , \vec{e_2}\}$ هي قاعدة فضاء المتجه R^2 بينما المجموعة $\{\vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3}\}$ ، $\vec{e_1} = (1 , 0 , 0)$ ، $\vec{e_2} = (0 , 1 , 0)$ ، $\vec{e_3} = (0 , 0 , 1)$ هي قاعدة فضاء المتجه R^3.

5) في أي فضاء متجه فإنه يوجد عدد كبير من القواعد لكن بعد هذا الفضاء محدد بعدد المتجهات ففي R^n فإن $\dim (R^n) = n$.

6) إذا كان عدد المتجهات يزيد عن بعد فضاء فإن المتجهات مرتبطة خطيا.

مثال(37- 3): لدينا المتجهات:

$$\vec{A} = (1, m-1, 0), \vec{B} = (n+3, -2, 4), \vec{C} = (-3, n, 0)$$

مرتبطة خطيا أوجد العلاقة التي تربط العددين m , n .

الحـل: حتـى تكون مجموعة المتجهات $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ مرتبطة خطيا فإن محدد المصفوفة المتكونة من أعمدة المتجهات يجب أن يسـاوي الصفر. وعليه فإنه يتوجب إيجاد المصفوفة ثم إيجاد محددها على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & n+3 & -3 \\ m-1 & -2 & n \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ثم نبدأ بإيجاد المحدد ونأخذ المفكوك بالنسبة للصف الثالث حيث يحتوي على صفرين.

$$\begin{vmatrix} 1 & n+3 & -3 \\ m-1 & -2 & n \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ m-1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(n+3(m-1)) = 0$$

$$\Rightarrow -4(n+3m-3) = 0 \Rightarrow n+3m-3 = 0 \Rightarrow n+3m = 3$$

وهذه العلاقة هي التي تربط m , n معا.

مثـال(38- 3): لتكن المجموعة:

$$A = \{(1,-1),(-1,0)\}$$

والمطلوب:

a) إثبات أن المجموعة A هي قاعدة للفضاء المتجه R^2.
b) إيجاد بعد فضاء المتجه R^2 أي $\dim(R^2)$.
c) عبر عن المتجه $\vec{B} = (-2, 4)$ بدلالة القاعدةA.

الحـل: a) دعنا أولا أن نبين أن المتجهين (0 , 1 -) , (1 - , 1) مستقلين وذلك بإثبات أن محدد المتجهين العموديين لا يساوي الصفر أي .

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-(1) = -1 \neq 0$$

لذا فإن المتجهين المعطيان مستقلين وحتى نثبت أن المتجهان يولدان الفضاء R^2 أو قاعدة لهذا الفضاء فإنه يتوجب لكل متجه(x_1, x_2) أن نجد قيم حقيقية لكل من a , b بحيث.

$$a = -x_2, b = -x_1 - x_2$$

وبحل نظام المعادلات أعلاه ينتج أن:

$$(x_1,x_2)=a(1,-1)+b(-1,0)$$
$$\Rightarrow (x_1,x_2)=(a-b,-a)\Rightarrow x_1=a-b, x_2=-a$$

وبالتعويض عن قيمة a , b في العلاقة أعلاه نحصل على العلاقة التالية.

$$(x_1,x_2)=-x_2(1,-1)+(-x_1-x_2)(-1,0)$$

أي أنه أمكن التعبير عن كل من a , b بقيم حقيقية وعليه فإن المجموعة A ولدت الفضاء R^2 ولكون المجموعة A مستقلة خطيا وولدت الفضاء R^2 فهي قاعدة لهذا الفضاء وهو المطلوب .

b) لوجود متجهين في R^2 فإن: $\dim(R^2)=2$

c) أمـا التعبير عن المتجه المعطى بدلالة القاعدة A فمن القاعدة أعلاه :

$$(x_1,x_2)=-x_2(1,-1)+(-x_1-x_2)(-1,0)$$

وبالتعويض عن $x_2=4$, $x_1=-2$ نكتب

$$(-2,4)=-4(1,-1)+(-(-2)-(4))(-1,0)$$
$$\Rightarrow (-2,4)=-4(1,-1)+-2(-1,0)$$

وعليه فإن إحداثيات المتجه (4 , 2 -) حسب القاعدة A هي 2 - , 4 -

مثـال(39- 3): هـل مجموعة المتجهات :

$$\{(1,-2,1),(-2,4,-2),(1,3,1)\}$$

تشكل قاعدة (أساس) لفضــاء المتجه R^3 ؟

الحـل: نختبر أولا محددة المصفوفة العمودية المكونة من هذه المتجهات:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

لأنه يوجد عمودان متشابهان في المصفوفة وعليه يكون محددها صفرا(خاصية) ولكون محددها صفرا فإن مجموعة المتجهات مرتبطة خطيا وبالتالي فهي ليست قاعدة الفضاء المتجه R^3.

مثـال(40-3): أوجد قيمة x التي تجعل المتجهات

$$\vec{A}=(2,x),\vec{B}=(-1,4)$$

قاعدة في فضاء المتجهات R^2.

الحـل: حتى تصبح هذه المتجهات قاعدة لفضاء المتجه R^2. فإنه يتوجب أن يكون المتجهان مستقلين وحتى يكونا مستقلين يتوجب أن يكون محدد المصفوفة العمودية لا يساوي الصفر وعليه فإن

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 8 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -8$$

مثـال(3-41): بين أن المجموعة

$$A = \{(2,7), (-1,5), (0,4)\}$$

مرتبطة خطيا.

الحـل: بما أن عدد المتجهات في المجموعة A هو 3 وأن بعد المتجه في المجموعة A هو 2 وبما أن عدد المتجهات في A يزيد عن بعد المتجه في A لذا فإن المجموعة A مرتبطة خطيا.

مثـال(3-42): إذا كانت المجموعة

$$A = \{(-2,6), (-1,k)\}$$

هي مولدة لفضاء المتجه V وحتى يكون dim (V) = 1 فأوجد قيمة k .

الحـل: بمـا أن عدد المتجهات في A هو 2 وأن dim (V) = 1

∴ عدد المتجهات أكبر من بعد V وعليه فإن المجموعة A مرتبطة خطيا.

وبالتالي فإن محدد المصفوفة العمودية للمتجهين يساوي صفرا.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2k + 6 = 0 \Rightarrow -2k = -6 \Rightarrow k = 3$$

وبعد هذا العرض من الأمثلة نستطيع أن نطرح التعريف التالي الشامل.

تعريـف(10- 3): إذا كانت V مجموعة الفضاء الخطي المتجه وكانت

$$A = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_k\}$$

بحيث أن المجموعة A مستقلة خطيا وكان G(A) = V حيث G(A) المجموعة المولدة للفضاء المتجه فنسمي المجموعة A بالقاعدة المولدة لفضاء المتجه V الخطي

وبصيغة أخرى نسمي مجموعة المتجهات

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

من الفضاء المتجهV بقاعدة الفضاء المتجهV إذا تحققت الشروط التاليـة:

1) أن تكون المتجهات $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k$

مستقلـة خطيا أي أنه إذا كانت

$$a_1, a_2, ..., a_n \in R$$

بحيث أن

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$$

2) $\forall A \subset V$ يوجد

$$a_1, a_2, ..., a_k \in R$$

بحيث أن

$$A = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_k$$

ونسمي الأعداد في هذه الحالة

$$a_1, a_2, ...a_n$$

فتسمى إحداثيات المتجهA بالنسبـة للقاعدة A.

ونورد مزيدا من الأمثلة على هـذا المفهوم .

مثـال(43- 3): هـل مجموعة المتجهات .

$$A = \{(0,1).(1,0)\}$$

مستقلة خطيا وهل تمثل قاعدة لفراغ المتجه R^2.

الحل: حتـى نثبت أن مجموعة المتجهات المعطاة مستقلة خطيا نجد محـدد المصفوفة العمودية المكونـة من هذه المتجهات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$\therefore$ فالمجموعة مستقلة خطيا وعليه فتعتبر المجموعة A قاعدة للفضاء المتجه R^2.

مثـال(44- 3): هـل مجموعة المتجهات

$$A = \{(2,1), (1, \sqrt{3})\}$$

مستقلة خطيا وهل هي قاعدة للفضاء المتجه R^2.

الحـل: نكون مصفوفة المتجهات العمودية ثم نجد محددها.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} - 1 \neq 0$$

فالمجموعةA مستقلة خطيا وبالتالي فهي قاعدة لفضاء المتجه R^2.

مثـــال(45- 3): هل مجموعة المتجهات

$$A = \{(2,1), (-1, \sqrt{2}), (0,1)\}$$

قاعدة لفضاء المتجه R^2.

الحل: بما أن عدد المتجهات يزيد على بعد الفضاء المتجه R^2.

∴ فالمتجهات مرتبطة خطيا وبالتالي فلا تعتبر مجموعة المتجهات قاعدة لفضاء المتجه R^2.

وبشكل عام نستنتج أن وجود القاعدة للفضاء الخطي ليس وحيدا أي أنه يمكن أن نجد أكثر من قاعدة للفضاء الخطي الواحد وكل مجموعة مولدة للفضاء الخطي تحتوي على قاعدة لهذا الفضاء الخطي.

إن الفضاءات المتجهـة مثل R^n , ... , R^3 , R^2 بشكل عام لها قاعدة مميزة تسمـى قـاعدة الأساس ومن أمثلتها

$$\{(1,0), (0,1) \rightarrow R^2$$

$$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rightarrow R^3$$

....

....

$$\{(1,0,0,......,0), (0,1,0,..........,0), (0,0,..........1)\} \rightarrow R^n$$

تعتبر قواعد أساسية لكل من الفضاءات R^n , ... , R^3 , R^2

مثـال(3-46): بين أي من المجموعات التالية تمثل قاعدة وأيها لا تمثل قاعدة للفضـــاء المتجه R^3 مع ذكر السبب.

1) $A_1 = \{(3,0,0), (0,-4,0), (0,0,5)$

2) $A_2 = \{(2,-4,2), (0,-3,2), (1,1,-1)$

3) $A_3 = \{(3,0,0), (0,-3,0), (0,0,5), (3,-3,5)\}$

الحل: 1) نكون مصفوفة المتجهات العمودية ثم نجد المحدد وذلك بأخذ المفكوك بالنسبة للصف الأول.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3(-4(5) - 0) = -60 \neq 0$$

∴ فالمجموعة A_1 مستقلـة خطيـا وبالتالي فإن المجموعة A_1 تعتبر قاعدة

الفضاء المتجه R^3 .

2) نكون مصفوفة المتجهات العمودية ثم نجد محددها.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(3-2) + 1(-8+6)$$

$$\Rightarrow 2 + (-2) = 0$$

هـذا يعنـي أن المجموعة A_2 مرتبطة خطيا.

3) بالنظـر إلـى مجموعـة المتجهات فإننا نلاحـظ أن عدد المتجهات هو أربعة متجهات بينما بعد المتجه هو 3 ولأن عدد المتجهات أكبر فإن مجموعة المتجهات مرتبطة خطيا.

نورد النظريات التالية وهذه النظريات تتعلق بخصائص القاعدة للفضاء المتجه .

نظـريـة(8- 3): إذا كانت V فضاء متجه خطي وكانت المجموعة $A \subset V$ حيث

$$A = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

تمثـل قاعـدة للفضاء الخطي وإذا كان $x \in V$ فإن إحداثيات هذا المتجه x بالنسبة للقاعدة وحيدة .

البـرهان: نفرض أن

$$a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in R$$

بحيث أن

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + ... + (a_n - b_n)v_n = 0$$

وبما أن A قاعدة للفضاء المتجه V فإن المتجهات $v_1, v_2, ... v_n$ مستقلـة خطيـا ومن شروط الاستقلال الخطـي فـإن

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = ... = a_n - b_n = 0$$

أي أن

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$$

وبالتالي فأن الإحداثيات للمتجـه x بالنسـبـة للقـاعـدة A وحيدة وهو المطلوب.

نظرية(9- 3): إذا كانت V فضـاء متجه وكانت $A \subset V$ بحيث أن

$$A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

قاعـدة للفضـاء المتجه V وكانت $A \subset Z$ فإن: $G(Z) = V$

نظرية(10- 3): إذا كانت V فضاء خطي وكانت.

$$A = \{v_1, v_2, \dots\dots\dots, v_n\}$$

قاعدة للفضاء الخطي V وإذا كانت Z قاعدة أخرى للفضاء المتجه V ، فإن A , Z تحتويان نفس العدد من المتجهات وإن كل متجه من Z هو تركيب خطي من متجهات A ، وكل متجه من A هو تركيب خطي من متجهاتZ .

البرهان: بما أن كلا A , Z هو قاعدة للفضاء الخطي المتجه V فإن $G(A) = G(Z) = V$ وهذا يدل على أن كل متجه من A هو تركيب خطي من متجهاتA . وإذا كان عدد عناصر A هو n وباستخدام النظرية السابقة يكون عدد عناصر z هو n أو أكبر من n فإذا كان عدد عناصر z يساوي n تم المطلوب أما إذا كان أكبر من n فإننا نفرض أن.

$$z = \{z_1, z_2, \dots\dots\dots\dots\dots, z_n, z_{n+1}\}$$

وبما أن

$$A = \{v_1, v_2, \dots\dots\dots\dots, v_n\}$$

مستقلة خطيا فإن أي مجموعة من المتجهات

$$z_1, z_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, z_{n+1}$$

كل منها عبارة عن تركيب خطي من المتجهات وبالتالي

$$v_1, v_2, \dots\dots\dots\dots, n$$

تكون مرتبطة خطيا اعتمادا على نظرية سابقة لذلك فإن Z ليست مستقلة خطيا وبالتالي فهي ليست قاعدة للفضاء المتجه V وبالتالي ليست مستقلة خطيا وهذا يناقض الفرض ويكون عدد عناصر Z مساويا لعدد عناصر A وهو المطلوب.

أمثلة إضافية

مثال(3-47): لدينا المتجهات

$$\vec{A} = (x, y), \vec{B} = (-1,3), \vec{C} = (5,7)$$

وعلى اعتبار أن

$$\vec{B} - 2\vec{A} = \vec{C}$$

أوجد $\overrightarrow{AB}$.

الحل:

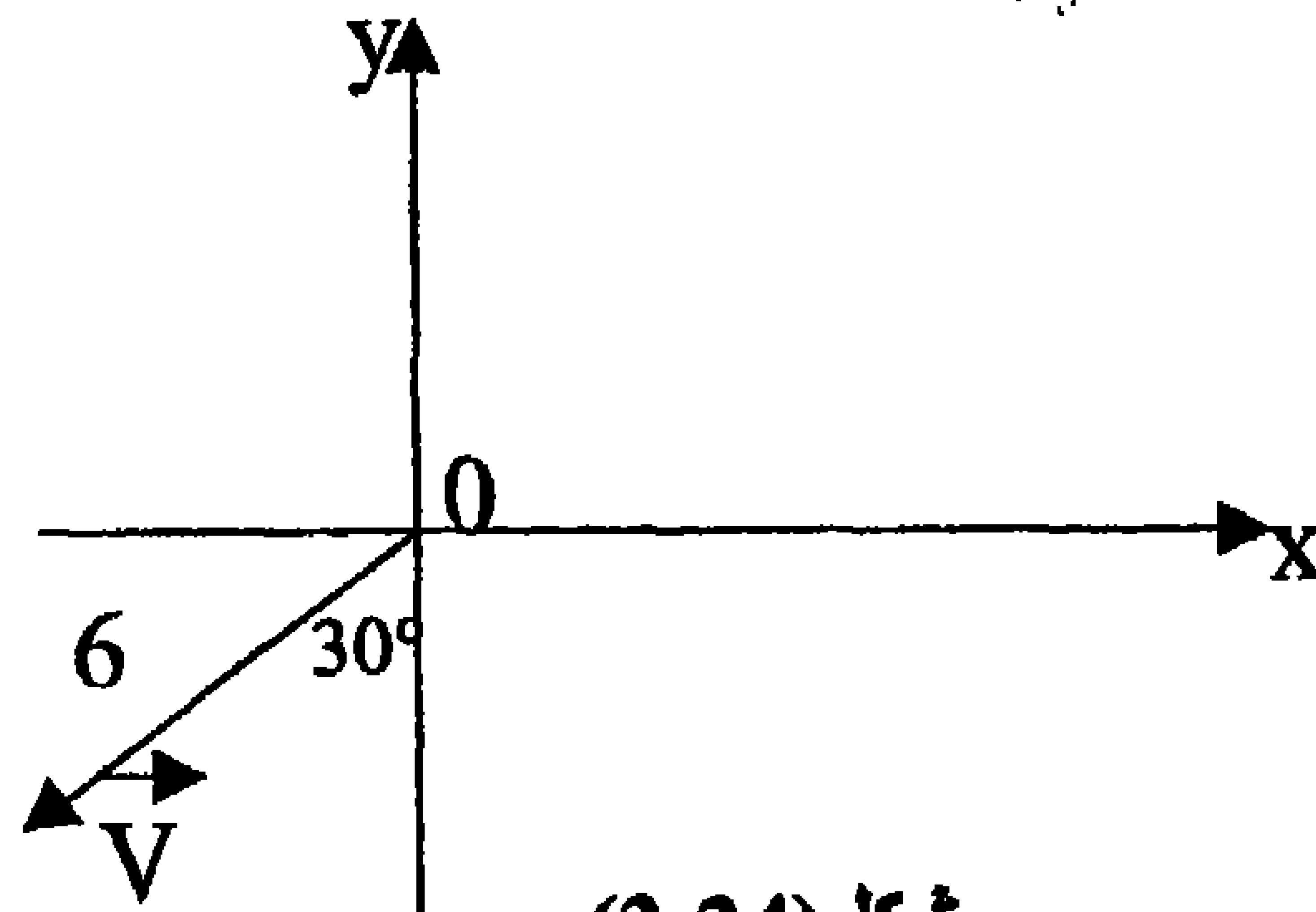
$$\vec{B}-2\vec{A}=\vec{C}\Rightarrow\vec{A}=\frac{1}{2}(\vec{B}-\vec{C})$$
$$=\frac{1}{2}((-1,3)-(5,7))=\frac{1}{2}(-6,-4)=(-3,-2)$$
$$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}\Rightarrow(-1,3)-(-3,-2)=(2,5)$$

مثال(3-48): في الشكل(3-24) أوجد متجه الوحدة للمتجه $\vec{V}$ الذي طوله6 وحدات وله نفس الاتجاه والاستقامة.

الحل: ليكن المتجه

$$\vec{V}=(x,y),\alpha=240$$
$$x=6.Cos240°=6(\frac{-1}{2})=-3$$
$$y=6.\sin 240°=6(\frac{\sqrt{3}}{2})=-3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow\vec{V}=(-3,-3\sqrt{3})$$

وكما هو واضح في الشكل(3-24)



شكل(3-24)

وإذا كان متجه الوحدة للمتجه$\vec{V}$ وله نفس الاتجاه والاستقامة هو $\vec{P}$ فان

$$\vec{P}=\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}\Rightarrow\vec{P}=\frac{(-3,-3\sqrt{3})}{\sqrt{9+27}}$$
$$=(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$$

مثال(49-3):

$$\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0, \vec{b}\perp\vec{c}, |\vec{a}|=2|\vec{b}|,$$
$$m(\vec{a},\vec{b})=\theta$$

أوجد قياس الزاوية θ بالدرجات

الحل: لحساب الزاوية بين المتجهين $\vec{a}\ ,\ \vec{b}$ فانه يتطلب حساب $\vec{a}\ .\ \vec{b}$ وبضرب طرفي المساواة $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ بالمتجه $\vec{b}$

$$\vec{b}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0\vec{b} \Rightarrow \vec{b}.\vec{a}+\vec{b^2}+\vec{b}.\vec{c}=0$$
$$\Rightarrow |\vec{b}|.|\vec{a}|.\cos\theta+|\vec{b}|^2+\vec{b}.\vec{c}=0$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{-|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|.|\vec{a}|}=\frac{-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{-|\vec{b}|}{2|\vec{b}|}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=120°$$

مثال(50-3): إذا كان

$$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}\perp\vec{b}, \|\vec{a}\|=2\sqrt{3}$$

أوجد $\vec{a}\ .\ \vec{c}$

الحل: نضرب طرفي المساواة $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ بالمتجه $\vec{a}$ لينتج

$$\vec{a}.\vec{a}=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) \Rightarrow (\vec{a})^2=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

ولكون

$$(\vec{a})^2=\|\vec{a}\|^2, \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \|\vec{a}\|^2=\vec{a}.\vec{c}, \vec{a}.\vec{c}=(2\sqrt{3})^2=12$$

مثال(51-3): على اعتبار أن

$$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\in R^3, \overrightarrow{AB}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+\vec{e_3},$$

$$\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$$

أوجد

$$\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (2,-3,1)$$
$$+\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (-4,5,3)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{A} = \overrightarrow{AC} = (-2,2,4), \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CA}\right|$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

مثال(3-52): على اعتبار أن

$$\vec{a} = (1,1,-1), \vec{b} = (2,0,0)$$

أوجد قيمة

$$\left\|2\vec{a} + 3\vec{b}\right\|$$

الحل:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1,1,-1) + 3(2,0,0)$$
$$= (2,2,-2) + (6,0,0) = (8,2,-2)$$
$$\left\|2\vec{a} + 3\vec{b}\right\| = \sqrt{(8)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 4 + 4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

مثال(3-53): لدينا المتجهات

$$\vec{A} = (2,-1,3), \vec{B} = (1,0,2)$$

أوجد قيمة العبارة

$$\overrightarrow{A^2}+\overrightarrow{B^2}-\vec{A}.\vec{B}$$

الحل: نجد

$$\overrightarrow{A^2}=\left\|\vec{A}\right\|^2=(\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2})^2=14,$$

$$\overrightarrow{B^2}=\left\|\vec{B}\right\|^2=(\sqrt{1^2+0^2+2})^2=5,$$

$$\vec{A}.\vec{B}=2(1)+(-1).0+3(2)=8$$

$$\overrightarrow{A^2}+\overrightarrow{B^2}-\vec{A}.\vec{B}=14+5-8=11$$

تمارين عامة
على الفصل الثالث

س1) أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين

$$\vec{A}=(4,-5,3),\vec{B}=(7,0,-1)$$

بالدرجات.

س2) لدينا المتجهين $\vec{a},\vec{b}$ وعلى اعتبار أن

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c},\vec{a}\perp\vec{b},\left|\vec{c}\right|=2\left|\vec{b}\right|$$

أوجد $\mathrm{Cos}(\vec{a},\vec{c})$

س3) لدينا المتجهات الثلاث في R^3

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}3\\k+1\\m\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}1\\6\\2\end{bmatrix},\vec{C}=\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}$$

وإذا كان

$$2\vec{A}+3\vec{B}=n\vec{c}$$

أوجد قيمة k,m

س4) لدينا المتجهين

$$\vec{A}=(4,-2,-4),\vec{B}=(0,-3,2)$$

أوجد

$$(\vec{A}-\vec{B})^2$$

س5) لدينا المتجهين

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}-3\\2\\-1\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}0\\-2\\4\end{bmatrix}$$

أوجد ناتج

$$(2\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-3\vec{B})$$

س6) لدينا المتجهات التالية

$$\vec{A}=(1,3,-1),\vec{B}=(-2,-4,3),\vec{C}=(4,-2,-3)$$

أوجد

$$(\vec{A}+\vec{B}).\vec{C}$$

س7) في فضاء المتجهات R^2 إذا كان

$$\vec{A}=(1,x,-3),\vec{B}=(1,-3,4),\vec{C}=(-1,2,0),\vec{A}\perp\overrightarrow{CB}$$

أوجد قيمة x.

تمارين موضوعية على الفصل الثالث

س1) لدينا المتجهات التالية

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}x-1\\x\\x+1\end{bmatrix},\vec{C}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

وكان

$$a+b+c=-12,(\vec{A}+\vec{B})\perp\vec{C}\Rightarrow|\vec{B}|=$$

$A)\sqrt{2}$ $B)\sqrt{7}$ $C)3$ $D)\sqrt{19}$ $E)5\sqrt{2}$

س2) لدينا المتجهات

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}\Rightarrow\left\|(\vec{B}.\vec{A})\vec{B}\right\|$$

$A)20$ $B)30$ $C)30\sqrt{2}$ $D)60$ $E)60\sqrt{3}$

س3) إذا كان

$$m(\vec{a}.\vec{b})=60°,\left|\vec{a}\right|=4,\left|\vec{b}\right|=2\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

$A)2$ $B)2\sqrt{2}$ $C)2\sqrt{3}$ $D)3\sqrt{2}$ $E)6$

س4) لدينا المتجهات

$$\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\2+Cos\alpha\\3+Sin\alpha\end{bmatrix},\vec{B}=\begin{bmatrix}2\\4+Sin\alpha\\6+Cos\alpha\end{bmatrix},\vec{C}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

والمرتبطة خطيا فان قيمةα هي

$A)0$ $B)\frac{\pi}{6}$ $C)\frac{\pi}{4}$ $D)\frac{\pi}{3}$ $E)\frac{\pi}{2}$

س5) لدينا المتجهات

$$\vec{A}=(2,5,-1),\vec{B}=(-3,1,0),\vec{C}=(-1,1,3)$$

فان الزاوية المحصورة بين

$$\vec{A}=(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$$

هي

$A)30°$ $B)45°$ $C)60°$ $D)90°$ $E)120°$

س6) في الفضاء المتجهR^3 فحتى يكون المتجه

$$\vec{C}=(-1,m,1)$$

مولد للمتجهين

$$\vec{A}=(1,2,-1),\vec{B}=(2,0,3)$$

في الفضاء فان قيمة m هي

$A)-3$ $B)-2$ $C)-1$ $D)0$ $E)1$

س7) أي من المجموعات التالية تعتبر مولدة لفضاء المتجهات R^2

$A)\{(0,1),(0,-3)\}$ $B)\{(2,1),(1,-1),(0,2)\}$

$C)\{(0,1),(0,0)\}$ $D)\{(1,1,(3,1)\}$ $E)\{(-1,2),(-2,4)\}$

س8) لدينا النقط

$$A=(-3,4), B=(1,-2), \vec{V}=(k-1)\vec{e_1}-6\vec{e_2}$$

وحتى يكون

$$\overrightarrow{AB}//\vec{V}$$

فان قيمة k هي

$A)3$ $B)4$ $C)5$ $D)6$ $E)7$

س9) لدينا المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ لهما نفس الاستقامة والاتجاه وإذا كان

$\vec{a}.\vec{b}=9, \vec{a}=4\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}$

فان المتجه $\vec{b}$ هو

$A)(8,-2,2)$ $B)(2,-4,9)$ $C)(2,\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$

$D)(\frac{4}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3})$ $E)(1,-6,-1)$

س10) إذا كان

$$|\vec{A}|=12, |\vec{B}|=8$$

وكان قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين هو

$$\frac{2\pi}{3}$$

فان

$$(\vec{A}+\vec{B})^2$$

هو

$A)400$ $B)304$ $C)-76$ $D)112$ $E)-144$

س11) إذا كان قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين

$$\vec{A},\vec{B}$$

هو

$$\frac{\pi}{3}, |\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 5, |\vec{C}| = 8$$

فان قيمة

$$(3\vec{A} - 2\vec{B}).(\vec{B} + 3\vec{C})$$

هي

$A) -59 \quad B) -62 \quad C) 182 \quad D) 38 \quad E) -12$

س12) إذا كان

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}$$

متجهي وحدة والزاوية المحصورة بينهما $30°$ فان

$$(\vec{e_1} + \vec{e_2})^2$$

يساوي

$A) 2-\sqrt{3} \quad B) 3 \quad C) 2+\sqrt{3} \quad D) 4 \quad E) \sqrt{3}+\sqrt{2}$

س13) إذا كان المتجه $\vec{A}$ يصنع $60°$ مع محور السينات ويصنع $120°$ مع محور الصادات وعلى اعتبار أن

$$|\vec{A}| = 2$$

فان المتجه $\vec{A}$ هو

$A) (1,-1,\sqrt{2}) \quad B) (-1,1,\sqrt{2}) \quad C) (-1,1,-\sqrt{2})$

$D) (-1,-1,-\sqrt{2}) \quad E) (1,1,\sqrt{2})$

س14) إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين

$$\vec{A},\vec{B}$$

هي

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

وكان

$$|\vec{A}| = 2, |\vec{B} = 1|$$

فان قياس الزاوية بين

$$(\vec{A} + \vec{B}), (\vec{A} - \vec{B})$$

هي

$A)Cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{12}}$ $B)Cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{13}}$ $C)Cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}$

$D)Cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{13}}$ $E)Cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{17}}$

س15) إذا كان

$|\vec{A}|=13,|\vec{B}|=19,|\vec{A}+\vec{B}|=24 \Rightarrow |\vec{A}-\vec{B}|=$

$A)6$ $B)18$ $C)12$ $D)22$ $E)17$

س16) إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين

$\vec{A},\vec{B}$

هي

$60°$، $|\vec{A}|=5,|\vec{B}|=8 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|=$

$A)\sqrt{129}$ $B)7$ $C)8$ $D)69$ $E)11$

س17) حتى يكون المتجهان

$\vec{A}=\alpha\vec{e_1}+3\vec{e_2}+2\vec{e_3},\vec{B}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\alpha\vec{e_3}$

متعامدان فان قيمة α تساوي

$A)12$ $B)-6$ $C)6$ $D)-2$ $E)2$

س18) إذا كان

$\vec{A}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3},\vec{B}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}-4\vec{e_3} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=$

$A)20$ $B)-20$ $C)-8$ $D)6$ $E)14$

س19) إذا كان

$\vec{A}=Cos80\vec{e_1}+Sin20\vec{e_2},\vec{B}=Cos340\vec{e_1}-170\vec{e_2} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=$

$A)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $B)\frac{1}{2}$ $C)\frac{-1}{2}$ $D)\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $E)Cos100$

س20) إن قيمة

$(2\vec{e_1}-\vec{e_2})\vec{e_2}+(\vec{e_2}-3\vec{e_3})\vec{e_3}+(\vec{e_1}-2\vec{e_3})^2 \Rightarrow$

$A)8$ $B)2$ $C)6$ $D)3$ $E)4$

س21) إذا كان

$\vec{A}=(x+2)\vec{e_1}+y\vec{e_2},\vec{B}=(x-2)\vec{e_1}+\vec{e_2}$

وعلى اعتبار أن المتجهين متعامدين فان أكبر قيمة تأخذها y هي

$A)-4 \quad B)-8 \quad C)8 \quad D)4 \quad E)\infty$

س22) لدينا المتجهات

$\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$

وعلى اعتبار أن

$|\vec{A}|=3,|\vec{B}|=1,|\vec{C}|=4 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{C}+\vec{C}.\vec{A}=$

$A)-12 \quad B)12 \quad C)-13 \quad D)-10 \quad E)10$

س23) لدينا النقاط A,B,C,D نقاط مختلفة في الفضاء أي من التالية يحقق العبارة

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=0$

$A)\overrightarrow{AC}//\overrightarrow{BD} \quad B)\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD} \quad C)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=0$

$D)\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=0 \quad E)\overrightarrow{BD}=0$

س24) لدينا المتجه

$$\vec{A}=\vec{C}-\frac{\vec{B}.(\vec{B}.\vec{C})}{\vec{B^2}}$$

فأي من العبارات التالية صحيحة

$A)\vec{A}\perp\vec{B} \quad B)\vec{B}\perp\vec{C} \quad C)|\vec{A}|=|\vec{B}|$

$D)|\vec{B}|=|\vec{C}| \quad E)\vec{A}\perp\vec{B}$

س25) ليكن

$\vec{A}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+3\vec{e_3}$ ، $\vec{B}=\vec{e_1}-3\vec{e_2}+2\vec{e_3}$ ، $\vec{C}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}+4\vec{e_3}$

إن المتجه $\vec{x}$ والذي يحقق العلاقة التالية

$\vec{x}\vec{A}=5,\vec{x}\vec{B}=-11,\vec{x}\vec{C}20$

هو

$A)\vec{A}=(-2,3,-2) \quad B)\vec{B}=(2,3,2) \quad C)(2,3,-2)$

$D)(2,-3,-2) \quad E)(2,-3,2)$

س26) على اعتبار أن

$\vec{A}=2\vec{e_1}+4\vec{e_2}-5\vec{e_3},\vec{B}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}$

إن متجه الوحدة الموازي للمتجه

$\vec{A}+\vec{B}$

هو

$A)(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7})$ $B)(\frac{-3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7})$ $C)(\frac{-3}{7},\frac{-6}{7},\frac{-2}{7})$

$D)(\frac{3}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7})$ $E)(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{-2}{7})$

س27) إن قيمة

α, β

اللتان تجعلان المتجهان

$\vec{A} = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + \beta\vec{e_3}, \vec{B} = \alpha\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$

متوازيين هي

$A)(4,-1)$ $B)(1,4)$ $C)(4,4)$ $D)(-4,1)$ $E)(4,1)$

س28) إذا كان

$\vec{A} // \vec{B}, \vec{A} = (6,-8,\frac{15}{2}), |\vec{B}| = 50 \Rightarrow \vec{B} =$

$A)(24,32,30)$ $B)(24,-32,30)$ $C)(-24,-32,30)$

$D)(24,32,-30)$ $E)(-24,32,30)$

س29) على اعتبار أن

$\vec{A} = (3,-1,5), \vec{B} = (1,2,-3) \Rightarrow |\vec{A} + \vec{B}| =$

$A)\sqrt{39}$ $B)\sqrt{27}$ $C)6$ $D)9$ $E)12$

س30) لدينا النقاط التالية

$A(-2,1), B(4,3), C(1,2)$

هي ثلاثة رؤوس لمتوازي الأضلاعABCD فان قيمة

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

هي

$A)6\sqrt{3}$ $B)5\sqrt{10}$ $C)10\sqrt{5}$ $D)12\sqrt{3}$ $E)12$

س31) لدينا النقطة $P^A(5,-3,4)$ إن طول المتجه المثبتOP هو

$A)6\sqrt{2}$ $B)5\sqrt{2}$ $C)5$ $D)6$ $E)4\sqrt{3}$

س32) لدينا النقطتين

$A(3,-1,-2)$ $B(-1,2,-1)$

أي من التالية المتجه

$\overrightarrow{AB}$

$A)(4,-3,-1)$ $B)(2,1,-3)$ $C)(-2,1,-3)$
$D)(4,-1,1)$ $E)(-4,1,-1)$

س33) لدينا

$A=(2,-3)$ $B=(1,-2)$

فان

$\overrightarrow{AB}$

هو

$A)(1,1)$ $B)(1,-1)$ $C)(-1,1)$ $D)(-1,-1)$ $E)(3,-5)$

الفصل الرابع
التحويلات الخطية

الفصل الرابع
التحويلات الخطية

4-1 التحويل الخطي

سندرس إقترانات من نوع آخر متغيراتها متجهات ونبدأ بالتعريف التالـي :

تعريف(1- 4):

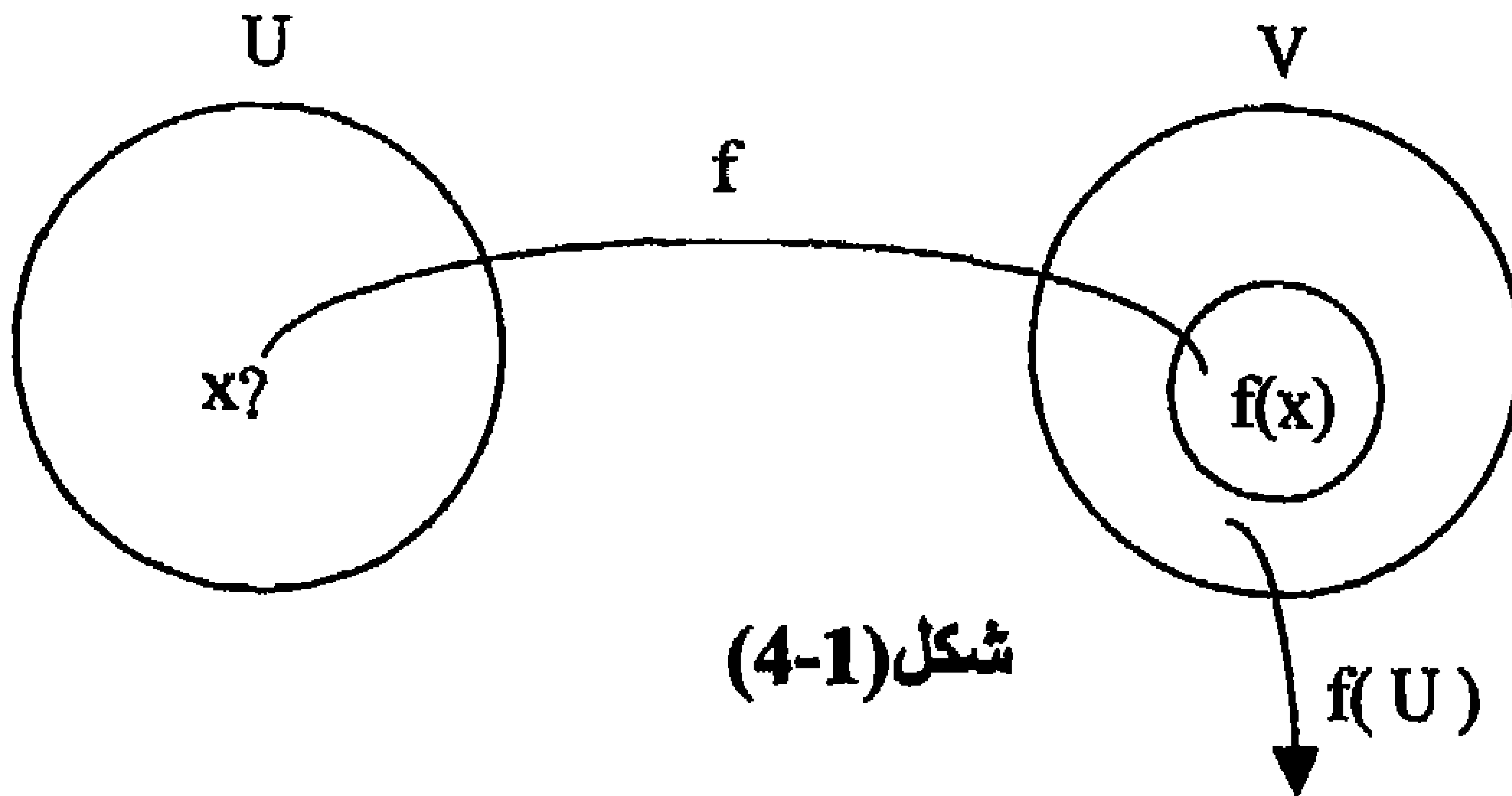
علـى اعتبار أن المجموعتيـن U, V المعرفتين علـى حقل الأعداد الحقيقيـةR وأن كلا من هاتين المجموعتين هو فضاء متجه فإذا حققتا الشـرطـين التاليين .

$1)\forall \vec{x},\vec{y} \in U \Rightarrow f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$2)\forall \vec{x} \in U, k \in R \Rightarrow f(k\vec{x})$

فالاقتران المعرفـ$f : U \to V$

يسمـى بالتحويـل الخطي وهو موضـح فـي الشـكل (1- 4) .



شكل(4-1)

مثــــال(1- 4): لدينـا الاقتران $f(x) = 2x - 1$.

معرف علـى النحو . $f : R \to R$ بين أن الاقتران ليس تحويلا خطيا.

الحل: لكون

$$\forall x, y \in R^2 \Rightarrow f(x) = 2x - 1, f(y) = 2y - 1$$

ثـم نبدأ بتحقيق شروط التحويـل الخطــي .

$$1) f(x) + f(y) = 2x - 1 + 2y - 1$$
$$f(x + y) = 2x + 2y - 1$$

وبمــا أن :

$$f(x+y) \neq f(x)+f(y)$$

∴ الاقتران f ليس تحويلا خطيا.

مثـال(2- 4): ليكن لدينـا الاقتران f المعرف علـى النحو .

$$f: R^2 \to R^2, f(x_1,x_2)=(2x_1-3x_2,x_2)$$

بين أن الاقتران f هو تحويلا خطيا.

الحـل : ليكـن :

$$\forall k \in R، \ y=(y_1,y_2)، \ x=(x_1,x_2)\in R^2$$

نتحقق من الشروط أعلاه

$$1)\forall x,y \in R^2 \Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$\Rightarrow f(x+y)=f(x_1+y_1,x_2+y_2)$$
$$=(2x_1+2y_1-3x_2-3y_2,x_2+y_2)$$
$$f(x)=f(x_1,x_2)=(2x_1-3x_2,x_2)$$
$$f(y)=f(y_1,y_2)=(2y_1-3y_2,y_2)$$
$$\Rightarrow f(x)+f(y)=(2x_1-3x_2+2y_1-3y_2,x_2+y_2)$$

نلاحظ أن

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

وهذا هـو الشـرط الأول للتحويل الخطي .

نبدأ بتحقيق الشرط الثاني

$$2) f(kx)=k.f(x)$$
$$f(kx)=f(kx_1,kx_2)=(2kx_1-3kx_2,kx_2)$$
$$=k(2x_1-3x_2,x_2)=k.f(x)$$

ولتحقـق الشـرطين السابقيـن فإن الاقتران f هــو تحويل خطي .

ومن المفيد طرح النظـريات التالية في التحويلات الخطية لتعميـق هـذا المفهوم.

نظـريــة (1- 4): إذا كان U , V فضائــي متجهيـن فــإن الاقتران

$$f: U \to V$$

يسمى تحويلا خطيا إذا حقق الخاصية التالية:

$$f(d.\vec{x}+e.\vec{y})=d.f(\vec{x})+ef(\vec{y})$$

حيث

$$d,e \in R، \ \vec{x},\vec{y} \in U$$

البرهان:

1) إذا كان f يحقق الخاصية

$$f(d.\vec{x}+e.\vec{y}) = df(\vec{x}) + ef(\vec{y})$$

نأخذ d = e = 1 فيكون

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

وإذا أخذنا e = 0 فيكون

$$f(d\vec{x}) = d.f(\vec{x})$$

وبذلك نكون حققنا الشروط التي يجب توفرها حتى يكون f تحويلا خطيا

2) وإذا كان f تحويلا خطيا فباستعمال الخاصية الأولى من التعريف يكون:

$$f(d.\vec{x}+e\vec{y}) = f(d\vec{x}) + f(e\vec{y})$$
$$= d.f(\vec{x}) + ef(\vec{y})$$

وذلك باستخدام الخاصية الثانية ويتم المطلوب.

مثال(3-4): ليكن لدينا الاقتران المعرف على النحو التالي

$$f : R^3 \to R^3, f(x,y,I) = (y,I,x)$$

والمطلوب إثبات أن f تحويل خطي

الحل: لاثبات أن f تحويل خطي نفرض أن

$$\vec{A} = (x_1, y_1, I_1), \vec{B} = (x_2, y_2, I_2)$$

ثم نبدأ بتحقيق الشروط التي يجب توفرها حتى يصبح f تحويل خطي

$$1)\ f(\vec{A}+\vec{B}) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, I_1+I_2)$$
$$= (y_1+y_2, I_1+I_2, x_1+x_2)$$
$$= (y_1, I_1, x_1) + (y_2, I_2, x_2)$$
$$f(\vec{A}) + f(\vec{B})$$

أي أن الشرط الأول قد تحقق والآن نعمل على تحقيق الشرط الثاني

$$2)\ f(d.\vec{A}) = f(dx_1, dy_1, dI) = (dy_1, dI_1, dx_1).$$
$$= df(\vec{A})$$

وهذا يعني أن f هو تحويل خطي

4 -2 التحويل الخطي الصفري:Zero Transform

تعريف(4-2): ليكن U,V فضائين متجهين وليكن الاقتران f اقترانا معرفا على النحو التالي

$$f : U \to V, f(\vec{A}) = 0, \forall \vec{A} \in \vec{U}$$

فان f يسمى تحويلا خطيا وهذا التحويل يسمى بالتحويل الصفري.

مثال(4-4):أثبت أن التحويل الصفري تحويلا خطيا.

الحل: حتى نثبت أن التحويل الصفري تحويلا خطيا فلا بد من تحقيق الشروط السابقة نلاحظ أن

$$f(\vec{A}) = 0, f(\vec{B}) = 0, f(\vec{A} + \vec{B}) = 0, f(d\vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow 1) f(\vec{A} + \vec{B}) = f(\vec{A}) + f(\vec{B}) = 0 + 0 = 0$$

وعليه فان الشرط الأول متحقق

$$2) f(d.\vec{A}) = d.f(\vec{A}) = d.0 = 0$$

∴ الشرط الثاني متحقق وبالتالي فان التحويل الصفري هو تحويل خطي.

4-3 مدى نواة التخويل الخطي:

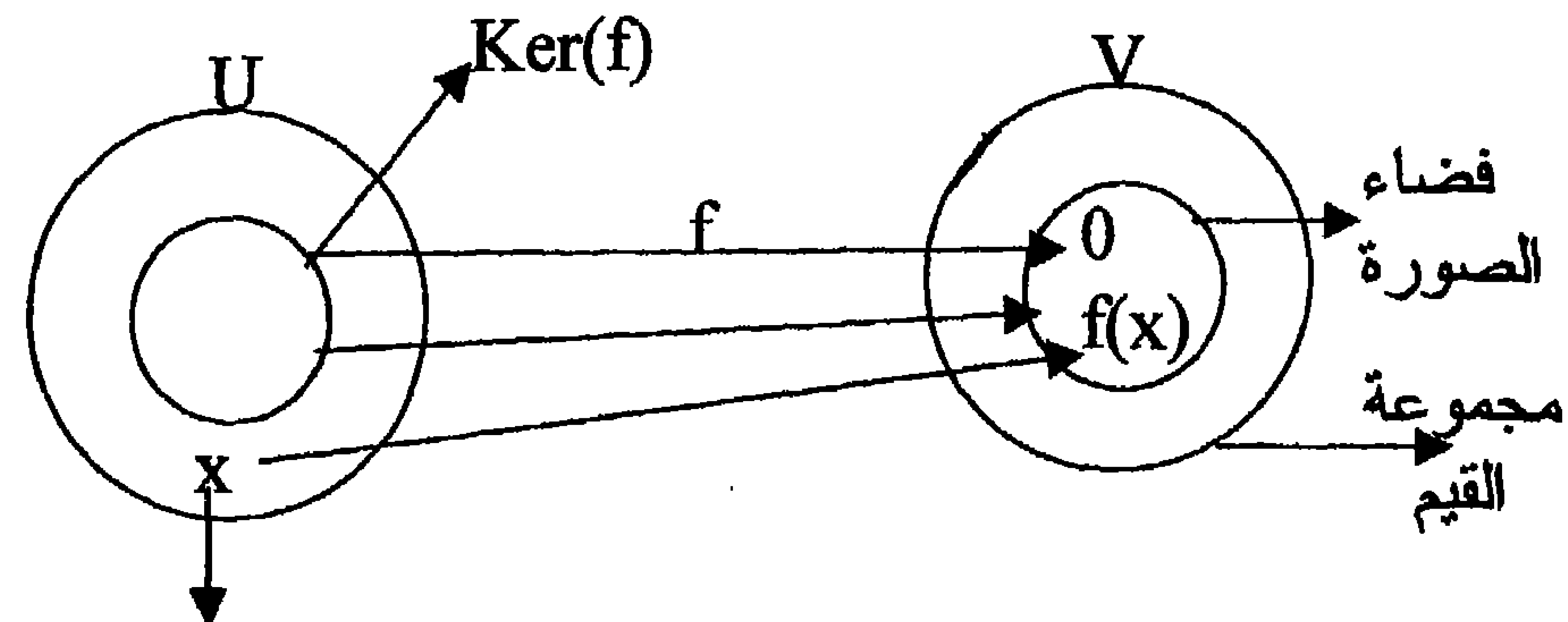
تعريف(4-3): ليكن U.V فضائي متجهين معرفين على حقل الأعداد الحقيقية R وليكن

$$f : U \to V$$

تحويلا خطيا وليكن، $\vec{0}, \vec{0}'$ متجهات صفرية لفضائي المتجهين U,V على التوالي، تسمى المجموعة التي تكون عناصر المتجه الصفري والتي هي صورة فضاء المتجه U بنواة التحويل الخطي ker(f))f) وبصيغة الرموز فان النواة تكتب على النحو التالي

$$k = \ker(f) = \{x : x \in U, f(x) = \vec{0}'\}, f(u) = \{f(x) : x \in u\}$$

حيث أن المجموعة الأولى هي مجموعة صورة التحويل الخطي بينما المجموعة الثانية هي صورة فضاء المتجه U والشكل(4-2) يوضح ذلك.



شكل(4-2)

ملاحظات:1) إن المجموعة k =ker(f) هي مجموعة فضاء متجه جزئي من الفضاء المتجهU

2) إذا كان

$$\ker(f) = k = \{\vec{0}\}$$

فان التحويل الخطي f تقابل. وعكس هذه العبارة صحيح

3)

$$\dim(u) = \dim(\ker(f)) + \dim(f(u)).$$

مثال(4-5): أوجد نواة التحويل الخطي المعرف على النحو التالي

$$f : R^2 \to R^3, f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, 2x_2)$$

الحل: من تعريف نواة التحويل الخطي فان

$$\ker(f) = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = (0,0,0)\}$$

وعليه إذا كان

$$(x_1, x_1 + x_2, 2x_2) = (0,0,0) \Rightarrow x_1 = 0, x_1 + x_2 = 0, 2x_2 = 0$$

ومن هنا نجد أن

$$x_1 = x_2 = 0$$

لذا فان نواة التحويل الخطي المطلوب

$$k = \{(0,0)\}$$

مثال(4-6): لدينا التحويل الخطي

$$f : R^2 \to R^2,$$

والمعرف بالقاعدة

$$f(x, y) = (2x - 2y, x - y)$$

أوجد a) الفضاء الصفري b) فضاء الصورة لهذا التحويل

الحل: a) لإيجاد الفضاء الصفري فانه يتوجب أن يكون

$$f(x,y)=(0,0)$$

وعليه

$$(2x-2y,x-y)=(0,0)\Rightarrow 2x-2y=0\Rightarrow x=y$$

أو

$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

وعليه فان نواة f أي

$$\ker(f)=\{(x,x):x\in R\}$$

أي أن الفضاء الصفري هو 1 وهو المستقيم المنصف للزاوية.

b) أن فضاء صورة التحويل الخطي f هو

$$f(R^2)=\{(2x-2y,x-y):x,y\in R\}$$
$$=(x-y).(2,1)$$

وذلك بإخراج عامل مشترك

وبوضع x-y=a فإننا نستطيع كتابة العلاقة أعلاه على النحو

$$(2x-2y,x-y)=a(2,1)$$

وعليه فان فضاء الصورة

$$f(R^2)=\{a(2,1):a\in R\}=\{(2a,a):a\in R\}$$
$$=\{(2x,x):x\in R\}$$
$$=\left\{(x,y):y=\frac{1}{2}x,x\in R\right\}$$

يعني أن فضاء الصورة هو الخط المستقيم.

$$y=\frac{1}{2}x.$$

4-4 مصفوفة التحويلات الخطية.

إذا كانت صورة المتجهات الأساسية

$$\vec{e_1}=(1,0,\ldots,0),\vec{e_2}=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\vec{e_n}=(0,0,\ldots,1)$$

والتي تمثل قاعدة الفضاء الاتجاهي R^n في التحويل الخطي

$$f : R^n \to R^m$$

وتحت تأثير الاقتران f هي

$$f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}),....., f(\overrightarrow{e_n})$$

معرفة فان f(x) معرف أيضا .
وحسب التحويل الخطي

$$f : R^n \to R^m$$

وعلى اعتبار أن

$$x = (x_1, x_2,....., x_n) \in R^n$$

فان صورة المتجه

$$\vec{x} = \overrightarrow{x_1 e_1} + \overrightarrow{x_2 e_2} + ... + \overrightarrow{x_n e_n}$$

تحت تأثير التحويل f هي

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + ... + x_n f(\overrightarrow{e_n}) ....(1)$$

ويمكن كتابة الشكل أعلاه على النحو.

$$f(\overrightarrow{e_1}) = f(1,0,0,........,0) = (a_{11}, a_{21},......, a_{m1}).$$

$$f(\overrightarrow{e_2}) = f(0,1,0,........,0) = (a_{12}, a_{22},......, a_{m2}).$$

....

....

$$f(\overrightarrow{e_n}) = f(0,0,..........,1) = (a_{1n}, a_{2n},......., a_{mn}).$$

وبالتعويض بهذه القيم في (1) نحصل على الشكل التالي

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{m2} \end{bmatrix} + ... + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ .... \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ..... \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$f(\overrightarrow{e_1}) \quad f(\overrightarrow{e}) .... f(\overrightarrow{e_n})$$

ونسمي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة التحويل الخطي للتحويل f.

ملاحظات: 1) في التحويل الخطي

$$f : R^n \to R^m$$

يمثل عدد الأعمدة في مصفوفة التحويل الخطي بعد أو الطول n في R^n ويمثل عدد السطور في مصفوفة التحويل الخطي بعد أو الطول m في R^m.

2) باستخدام مصفوفة التحويل A للتحويل

$$f : R^n \to R^m$$

نستطيع إيجاد صورة أي متجه $\vec{x}$ في R^n وذلك باستخدام قاعدة ضرب المصفوفات أي

$$f(\vec{x}) = A.(\vec{x}).$$

3) في مصفوفة التحويل الخطي

$$f : R^n \to R^m$$

إن عناصر العمود الأول ما هي إلا معاملات X_1 في التحويل الخطي كذلك عناصر العمود الثاني هي معاملات X_2 وهكذا فان عناصر العمود النوني هو معاملات X_n.

مثال(7-4): لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو

$$f : R^2 \to R^3$$

بالقاعدة

$$f(X_1,X_2)=(2X_1-X_2,X_1-X_2,3X_1+4X_2)$$

أوجد مصفوفة التحويل لهذا التحويل الخطي .

الحل: المصفوفة المطلوبة هي

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

تعريف (4-4): أن رتبة مصفوفة التحويل الخطي هي نفسها رتبة التحويل الخطي f

مثال(4-8): لدينا التحويل الخطي

$$f:R^3\to R^3$$

معرف بالقاعدة .

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_1+x_2,x_2-x_3)$$

أوجد رتبة هذا التحويل الخطي .

الحل: بالاستفادة من الملاحظة أعلاه و الملاحظات السابقة نكون أولا مصفوفة التحويل الخطي وذلك بعد أن نضع قاعدة التحويل على الصورة

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1x_1+0.x_2+0.x_3,1x_1+1.x_2+0.x_3,0.x_1+1.x_2-1x_3)$$

ثم نكون مصفوفة التحويل التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

أن رتبة هذه المصفوفة هي rank(A)=3 وهذه الرتبة هي رتبة التحويل الخطي المعطى .

ملاحظة : إن رتبة التحويل لفضاءات المتجهات f:U→V هو بعد (طول) الفضاء المعطى (عدد المتجهات المكونة للفضاء المعطى).

مثال(4-9): لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو

$$f:R^3\to R^3$$

بالقاعدة

$$f(x,y,z)=(2x,y+z,x-y+z)$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي لهذا التحويل .

الحل: هناك طريقتان لتكوين مصفوفة التحويل الخطي .

a) باستخدام صور متجهات قاعدة الفضاء حيث أنها تمثل أعمدة مصفوفة التحويل على النحو التالي .

$$f(\overrightarrow{e_1}) = f(1,0,0) = (2,0,1)$$
$$f(\overrightarrow{e_2}) = f(0,1,0) = (0,1,-1)$$
$$f(\overrightarrow{e_3}) = f(0,0,1) = (0,1,1).$$

وعليه تصبح مصفوفة التحويل المطلوبة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) نضع قاعدة التحويل على الصورة .

$$f(x,y,z) = (2.x + 0.y + 0.z, 0.x + 1.y + .1.z, 1.x - 1.y + 1.z)$$

ثم نأخذ معاملات المتغيرات لتكون صفوف مصفوفة التحويل الخطي .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(4-10): على اعتبار أن مصفوفة التحويل للتحويل

$$f : R^2 \to R^3$$

هو

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد قاعدة التحويل

a) على اعتبار أن

$$x = (x_1, x_2) \in R^2$$

ومن كون

$$f(x) = A.x$$

فان

$$f(x)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x1\\ x2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\ 2x_1+3x_2\\ 4x_1\end{bmatrix}$$

وهذه القاعدة نكتبها على النحو التالي

$$f(x_1,x_2)=(x_1-x_2,2x_1+3x_2,4x_1)$$

b) نعرف أن عناصر العمود الأول هي معاملات x_1 في مركبات القاعدة وكذلك عناصر العمود الثاني هي معاملات x_2 في مركبات القاعدة لتصبح على النحو

$$f(x_1,x_2)=(1x_1-1x_2,2x_1+3x_2,4x_1+0.x_2)$$
$$=(x_1-x_2,2x_1+3x_2,4x_1).$$

وهي القاعدة المطلوبة .

مثال(4-11): لدينا مصفوفة التحويل

$$f:R^2\to R^2$$

وهي

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

أوجد صورة المتجه

$$\vec{x}=(2,-1)$$

تحت تأثير التحويل f .

الحل: هناك طريقتان لحل مثل هذه الأسئلة

a) نجد الصورة بالطريقة المباشرة وباستخدام مصفوفة التحويل ولكون

$$f(x)=A.\vec{x}$$

نجد أن

$$f(2,-1)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=(1,-2).$$

b) من مصفوفة التحويل

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

نجد قاعدة التحويل

$$f(x_1,x_2)=(2x_1+3x_2,-x_1)$$

ثم نجد صورة المتجه وفق القاعدة أعلاه .

$$f(2,-1) = (2,2+3(-1),-2) = (1,-2)$$

وهو المطلوب

4-5: العمليات على التحويلات الخطية .

4-5-1: جمع التحويلات الخطية .

ليكن لدينا فضائي المتجهين U,V معرفين على حقل الأعداد الحقيقية R بالتحويل

$$f : U \to V, g : U \to V$$

ولنعرف

$$h(x) = f(x) + g(x), \forall x \in U$$

فإننا نسمي h(x) مجموع التحويلين.

مثال(4-12): ليكن لدينا التحويلين

$$f : R^2 \to R^3, g : R^2 \to R^3$$

المعرفين بالقاعدتين

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)$$
$$g(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2, x_1, 3x_1 + x_2).$$

أوجد

$$(f + g)(x_1,x_2)$$

الحل:

$$(f + g)(x_1,x_2) = (x_1 + x_2 + 2x_1 - x_2, x_1 - x_2 + x_1, x_2 + 3x_1 + x_2)$$
$$= (3x_1, 2x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2)$$

4-5-2 ضرب التحويل الخطي في عدد ثابت.

ليكن لدينا التحويل

$$f : U \to V$$

حيث U,V فضائي متجهين معرفين على حقل الأعداد الحقيقية

$$\forall x \in U, a \in R \Rightarrow g(x) = a.f(x)$$

فنسمي التحويل الناتج g بأنه تحويل حاصل ضرب عدد حقيقي في تحويل خطي

مثال(4-13): ليكن لدينا التحويل

$$f : R^2 \to R^2$$

والمعرف بالقاعدة

$$f(x,y) = (x - 2y, x + 3y$$

أوجد ناتج

$$-2f(x,y)$$

الحل:

$$-2f(x,y)=-2[(x-2y,x+3y)]=(-2x+4y,-2x-6y).$$

4-5-3 تركيب التحويلات الخطية.

ليكن لدينا التحويلين

$$f:U\to V, g:V\to S$$

حيثU,V,S ثلاث فضاءات متجه على حقل الأعداد الحقيقية R.

$$\forall x\in U\Rightarrow g\circ f:U\to S,(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

فنسمي

$$(g\circ f)(x)$$

تركيب تحويلين خطي

مثال(4-14): ليكن لدينا التحويلين

$$f:R^2\to R^3, g:R^2\to R^2$$

معرفين بالقاعدتين

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,-x_1,x_2).$$
$$g(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3,x_3-x_1).$$

أوجد

$$(g\circ f)(2,1)$$

الحل:

$$(g\circ f)(2,1)=g[f(2,1)]=g[(2+1,-2,1)]=g(3,-2,1)=(3-2-1,1-3)$$
$$=(0,-2)$$

ملاحظة: ليكن لدينا التحويلات الخطية

$$f:U\to V, g:V\to S$$

حيث U,V,S ثلاثة فضاءات متجه معرفة على حقل الأعداد الحقيقية فإذا كانت مصفوفة التحويل للتحويل f هي A ، وللتحويل g هي B بينما للتحويل h هي C فان.

1) مصفوفة التحويل للتحويل f+g هي A+B.
2) مصفوفة التحويل لتركيب تحويلين C.A.
(3

$\forall k \in R$

فان مصفوفة التحويل للتحويل k f هي k.A.

4-6 التحويلات الهندسية في المستوى

هناك العديد من التحويلات الهندسية سنتناول أهم هذه التحويلات
نظرا لأهمية هذه التحويلات في كثير من المواضيع الرياضية والهندسية ومن أهمها

4-6-1 الانسحاب

تعريف(4-5): ليكن المتجه

$$\vec{A} = (a_1, a_2)$$

هو متجه ثابت في المستوى R^2 وعلى اعتبار أن الاقتران المعرف

$$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A}$$

فإننا نقول للاقتران

$$f : R^2 \to R^2$$

بأنه تحويل انسحاب ونقول للمتجه $\vec{A}$
بأنه متجه الانسحاب وسنرمز لتحويل الانسحاب
بالرمز

$$f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A}$$

وحسب التعريف فان

$$f_{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A} = (x_1, x_2) + (a_1, a_2) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$$

وبقول آخر إن صورة النقطة $P(x_1,x_2)$ تحت تأثير انسحاب مقداره المتجه $\vec{A}$
هو النقطة $Q(x_1+a_1, x_2+a_2)$.

تعريف(4-6): إذا كان

$$\vec{A} = \theta = (0,0)$$

فانه يقال لتحويل الانسحاب f_θ بانسحاب الوحدة وتصبح صورة كل نقطة في المستوى
هي النقطة نفسها.

مثال(4-15): لدينا متجه الانسحاب

$$\vec{A} = (2,5)$$

فلأي متجه يحول

$$f_{\vec{A}}$$

المتجه

$$\vec{x} = (-2,3)$$

في المستوى.

الحل: كما نعلم من أعلاه وحسب التعريف فان

$$f\vec{A}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A} = (-2,3) + (2,5) = (0,5)$$

مثال(4-16): في المستوى

$$f : R^2 \to R^2$$

وكان متجه الانسحاب

$$\vec{A} = (-1,3)$$

وكان تحويل الانسحاب معطى على النحو التالي

$$f_{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A}$$

أوجد معادلة صورة المستقيم

$$3x - 4y + 1 = 0$$

تحت تأثير تحويل الانسحاب أعلاه

الحل: لنأخذ

$$\vec{x} = (x, y), f_{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{x`} = (x`, y`)$$

وحسب التعريف فان

$$f_{\vec{A}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A} = (x, y) + (-1,3)$$
$$= (x-1, y+3) = (x`, y`)$$
$$\Rightarrow x - 1 = x` \Rightarrow x = x`+1, y + 3 = y` \Rightarrow y = y`-3$$

وبالتعويض عن قيم x,y في المعادلة الأصلية نحصل على صورة المعادلة وعليه فان صورة المعادلة تصبح على النحو

$$3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 3(x`+1) - 4(y`-3) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x`-4y`+16=0$$

مثال(4-17): لدينا

$$f: R^2 \to R^2, f(x_1,x_2)=(x_1+2, x_2-1$$

والمطلوب a) إثبات أن f هو تحويل انسحاب.

b) إثبات أن المسافة بين النقطتين

$$\vec{p}=(3,2), \vec{k}=(0,1)$$

تساوي المسافة بين صور النقاط تحت تأثير هذا الانسحاب

الحل: a) يمكن كتابة التحويل على الصورة

$$f(x_1,x_2)=(x_1+2, x_2-1)=(x_1,x_2)+(2,-1)$$

وإذا أخذنا

$$\vec{x}=(x_1,x_2), \vec{A}=(2,-1)$$

نستطيع كتابة الصيغة التالية

$$f(\vec{x})=\vec{x}+\vec{A}$$

أي أن اقتران التحويل هو انسحاب.

b) نجد أولا المسافة بين النقطتين

$$\vec{p}=(3,2), \vec{k}=(0,1)$$

من قانون المسافة في المستوى.

$$d=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2} \quad =\sqrt{10}$$

ثم نجد صور النقطP، k تحت تأثير التحويل f على النحو.

$$f_{(\bar{p})}=f(3,2)=(3+2,2-1)=(5,1)$$

$$f_{(\bar{k})}=f(0,1)=(0+2,1-7)=(2,0)$$

وعليه فالمسافة بين النقطتين p`,k` هي.

$$d`=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$$

نلاحظ أن d=d` وهو المطلوب.

4-6-1-1 خصائص الانسحاب

1) تحويل الانسحاب ليس تحويلا خطيا.

2) تحويل الانسحاب يحافظ على الأطوال وقياس الزوايا.

3) تحويل الانسحاب يحول القطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة موازية للأولى والدائرة إلى دائر والزاوية إلى زاوية أي أنه يحافظ على الشكل.

4) تركيب انسحابين انسحاب أيضا وبصيغة الرموز فانه في المستوى R^2

$$f_{\vec{A}} = \vec{x} + \vec{A}, f_{\vec{B}} = \vec{x} + \vec{B} \Rightarrow (f_{\vec{A}} 0 f_{\vec{B}})(\vec{x}) = f_{\vec{A}+\vec{B}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A} + \vec{B}$$

4-6-1-2 إزاحة (انسحاب) الإحداثيات

ليكن متجه الانسحاب

$$\vec{A} = (a_1, a_2)$$

في المستوى R^2 ولو قلنا أن انسحاب المحور x وفق تحويل الانسحاب هو المحور x` الموازي للمحور x وكذلك المحور y صورته المحور y` الموازي للمحور y ونقطة الأصل 0(0,0) وفق هذا التحول هي 0` وتصبح على النحو

$$0` = f(0) = \vec{A} + \vec{0} = (a_1, a_2) + (0,0) = (a_1, a_2)$$

وعليه فان نظام الإحداثيات (xoy) يصبح وفق التحويل

$$f_{\vec{A}}$$

هو

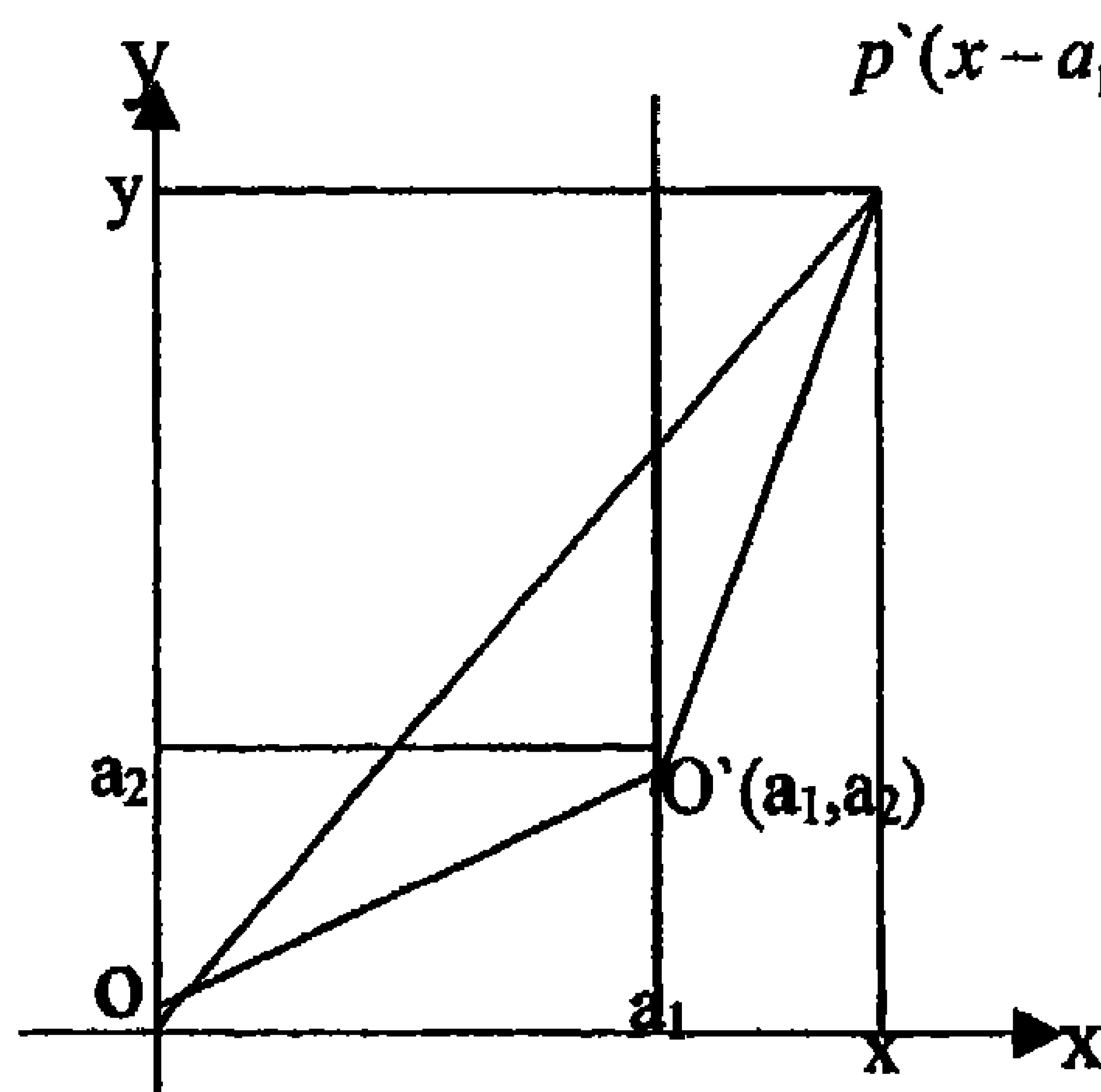
$$(x`o`y`)$$

وصورة النقطة P(x,y) في النظام الإحداثي XOY تصبح في النظام الإحداثي الجديد (X`O`Y`)

النقطة

$$p`(x - a_1, y - a_2)$$

كما تبدو في شكل(4-3)



شكل(4-3)

مثال(4-18): ليكن

$$\vec{A} = (-1-4), \vec{B} = (2.-3)$$

متجهي انسحاب والمطلوب إيجاد صورة النقطة P(5,2) تحت تأثير تحويل تركيب الانسحابين

$$f_{\vec{B}} \circ f_{\vec{A}}$$

الحل: لكون

$$(f_{\vec{B}} \circ f_{\vec{A}})(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{A} + \vec{B}$$

فان صورة النقطة P هي

$$f_{\vec{B}} \circ f_{\vec{A}}(5,2) = (5,2) + (-1,4) + (2,-3) = (5-1+2,2+4-3) = (6,3)$$

مثال(4-19): دائرة معادلتها

$$x^2 + y^2 = 16$$

إذا سحبت المحاور الإحداثية بمقدار المتجه

$$\vec{A} = (-4,3)$$

أوجد معادلة الدائرة وفق المحاور الإحداثية الجديدة

الحل: إذا سحبت المحاور الإحداثية XOY بمقدار المتجه $\vec{A}$ فان المحاور الإحداثية الناتجة هي X`O`Y` فإذا كانت النقطة P(x,y) تقع على الدائرة التي محاورها الإحداثية XOY ولتكن إحداثيات هذه النقطة في النظام X`O`Y` هي P`(x,y) ولكون

$$x = x + a_1 = x - 4$$
$$y = y + a_2 = y + 3$$

وإذا ما وضعت هذه القيم في أماكنها في معادلة الدائرة

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$$

4-6-2 تحويل الدوران.

تعريف(4-7): ليكن لدينا

$$\alpha(0 \le \alpha \le 2\pi)$$

عدد حقيقي،

$$A(x,y), B(x`,y`)$$

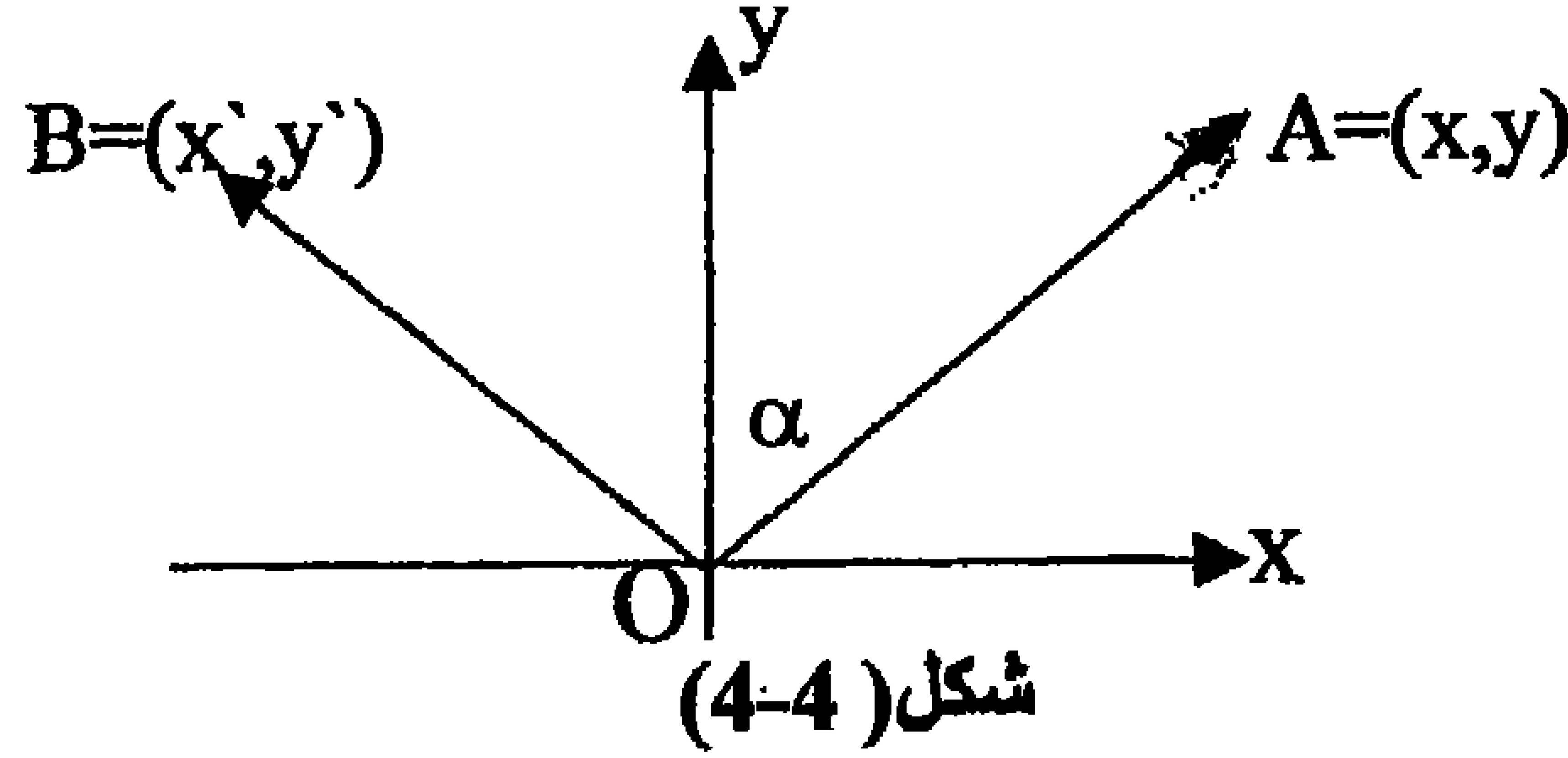
نقطتين في المستوى وعلى اعتبار أن

$$|OA| = |OB|, m(A\hat{O}B) = \alpha$$

نسمي التحويل المعرف على النحو

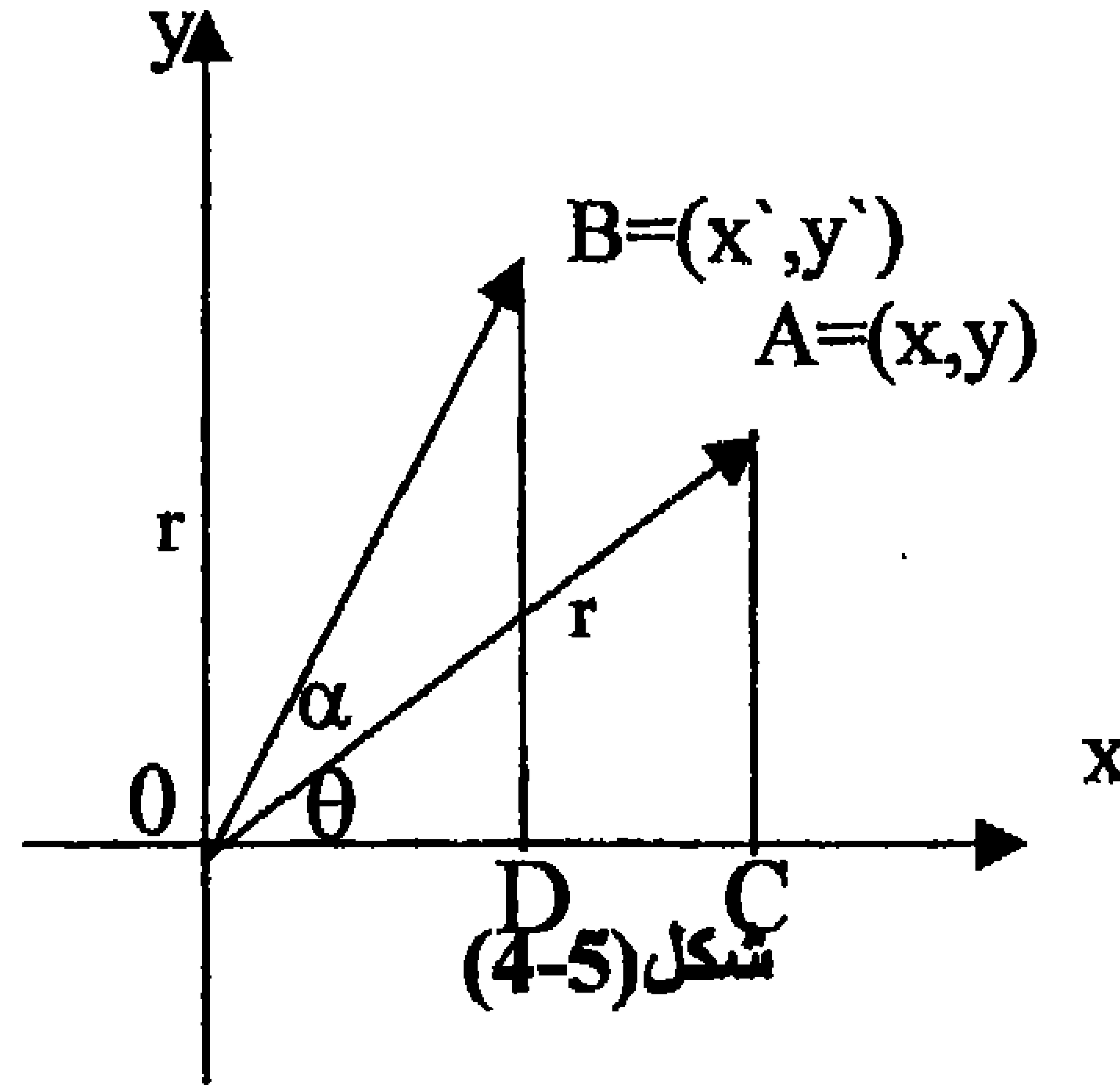
$$D_\alpha(A)=B, D_\alpha : R^2 \to R^2$$

بتحويل الدوران للنقطة A بزاوية قدرها α راديان حول نقطة الأصل O لتكون صورتها النقطة B وهذا واضح في شكل (4-4)



شكل (4-4)

وبالتدقيق في شكل(4-5)



شكل(4-5)

نجد أن

$$x`=|OB|Cos(\alpha+\theta)=r.Cos(\alpha+\theta)=rCos\alpha.Cos\theta-rSin\alpha.Sin\theta$$

$$y`=|OB|Sin(\alpha+\theta)=rSin\alpha Cos\alpha+rCos\alpha Sin\theta$$

$$x=|OA|Cos\theta=r.Cos\theta, y=|OA|Sin\theta=rSin\theta$$

وبوضع هذه القيم في أماكنها أعلاه نحصل على

$$x`=x.Cos\alpha-y.Sin\alpha, y`=x.Sin\alpha+y.Cos\alpha$$

ويمكن التعبير عن المعادلتين أعلاه بصيغة المصفوفات على النحو

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

وتصبح مصفوفة التحويل للدوران

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{bmatrix}$$

مثال(4-20): لدينا تحويل الدوران حول نقطة الأصلO بزاوية دوران

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

والمطلوب إيجاد

$$D_{\frac{\pi}{3}}$$

a) مصفوفة التحويل للدوران

b) صورة النقطة P(0,2) تحت تأثير هذا الدوران

c) معادلة الصورة للخط المستقيم الذي معادلته 2x+y=5 تحت تأثير هذا الدوران

الحل: a) إن مصفوفة الدوران

$$D_{\frac{\pi}{3}}$$

هي

$$A = \begin{bmatrix} Cos\frac{\pi}{3} & -Sin\frac{\pi}{3} \\ Sin\frac{\pi}{3} & Cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) إن إحداثيا النقطة P\`(x\`,y\`) هي

$$f(\vec{x}) = D_{\frac{\pi}{3}}.\vec{x}$$

وتكون صورة النقطة P(0,2)

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = (-\sqrt{3},1)$$

يعني

$$y` = \frac{\sqrt{3x}}{2} + \frac{y}{2}$$

c) لتكن النقطة $k(x,y)$ نقطة واقعة على المستقيم $2x+y=5$ ولتكن صورة النقطة تحت تأثير تحويل الدوران هي $k`(x`,y`)$ ومن كون أن

$$x` = -\sqrt{3}, y` = 1$$

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3y}}{2} \\ \frac{\sqrt{3x}}{2} + \frac{y}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow x` = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

وبالاستفادة من المعادلتين أعلاه نجد أن

$$x = \frac{x` + \sqrt{3y`}}{2}, y = \frac{-3x` + \sqrt{3y`}}{2\sqrt{3}}$$

وبالتعويض عن x,y في المعادلة الأصلية نكتب العلاقة التالية

$$2\left(\frac{x` + \sqrt{3y`}}{2}\right) + \frac{-3x` + \sqrt{3y`}}{2\sqrt{3}} = 5$$

وبتبسيط المعادلة أعلاه نحصل المعادلة المطلوبة

$$(2\sqrt{3} - 3)x` + (6 + \sqrt{3})y` = 10\sqrt{3}$$

4-6-2-1 خصائص تحويل الدوران

a) يعتبر تحويل الدوران تحويل خطي.

b) يحافظ تحويل الدوران على قياس الأطوال وقياس الزوايا.

c) إن صورة نقطة الأصل (0,0) هي (0,0) أيضا تحت تأثير D_α .

d) إذا كانت مجموعة جميع الدورانات في المستوى هي A فان المجموعة A وعملية التركيب(بعد) المعرفة على A تشكل زمرة ابدالية.

e) تركيب تحويلين دورانيين هو تحويل دوراني أيضا.
وليكن لدينا الدورانيين D_α،D_θ المعرفين من

$$R^2 \rightarrow R^2$$

فان مصفوفة تركيب الدورانيين

$$D_\alpha \circ D_\theta = D_{\alpha+\theta} = \begin{bmatrix} Cos(\alpha+\theta) & -Sin(\alpha+\theta) \\ Sin(\alpha+\theta) & Cos(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

f) يعتبر تحويل الدوران D_θ بالنسبة لعملية التركيب هو محايد التركيب

g) يعتبر تحويل الدوران $D_{-\alpha}$ هو نظير التحويل الدوراني D_α بالنسبة لعملية التركيب

مثال(4-21): ليكن لدينا التحويلين الدورانيين

$$D_{\frac{\pi}{3}} : R^2 \rightarrow R^2, D_{\frac{\pi}{6}} : R^2 \rightarrow R^2$$

أوجد صورة النقطة $A=(-1,3)$ بالنسبة لتركيب الدورانين

$$D_{\frac{\pi}{3}} \circ D_{\frac{\pi}{6}}$$

الحل: بالاستفادة من الخاصية الخامسة فان

$$D_{\frac{\pi}{3}} \circ D_{\frac{\pi}{6}} = D_{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = D_{\frac{\pi}{2}}$$

ولإيجاد صورة النقطة $(-1,3)$ بالنسبة لتركيب الدورانين

$$D_{\frac{\pi}{3}} \circ D_{\frac{\pi}{6}}$$

أي

$$D_{\frac{\pi}{2}}(-1,3)$$

نفرض أن صورة A هي $A`=(x`,y`)$ وعليه فان مصفوفة التحويل

$$D_{\frac{\pi}{2}}$$

هي

$$\begin{bmatrix} Cos\frac{\pi}{2} & -Sin\frac{\pi}{2} \\ Sin\frac{\pi}{2} & Cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فان صورة النقطة المطلوبة هي

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

أي أن صورة النقطة A هي A`=(-3,-1)

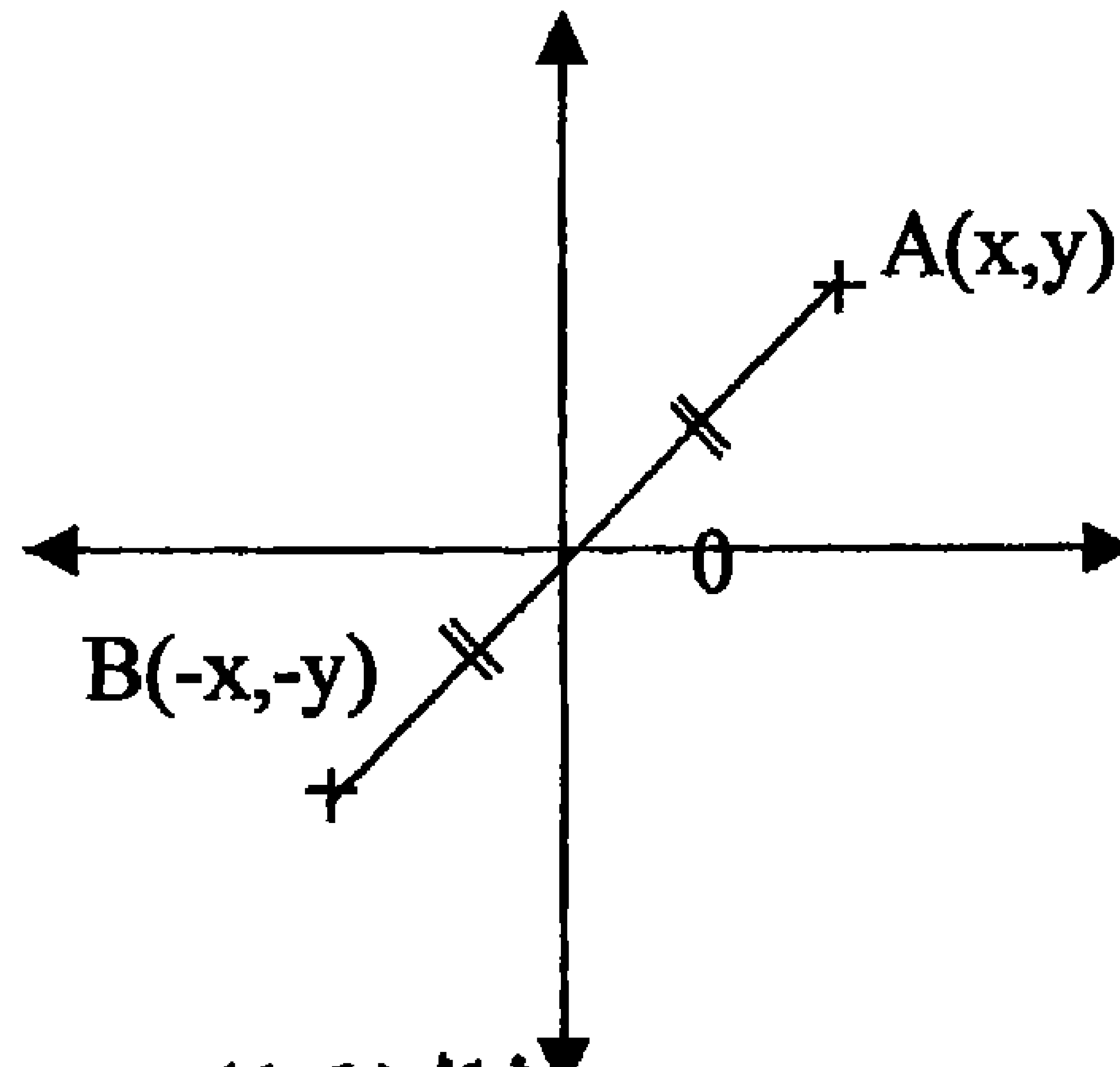
4-6-3 التماثل: هو أحد التحويلات الهندسية وهناك عدة أنواع من هذه التماثلات نذكر منها ما يلي

a) التماثل حول نقطة الأصلO

تعريف(4-8): يقال للتحويل الدوراني حول نقطة الأصل والذي زاويته

$\alpha = \pi$

بتحويل التماثل وسنرمز له بالرمز S_0 وهذا واضح في شكل(4-6)



شكل(4-6)

وعليه فتكون مصفوفة الدوران حول نقطة الأصلO بزاوية قدرها

$\alpha = \pi$

$$A = \begin{bmatrix} Cos\pi & -Sin\pi \\ Sin\pi & C\cos\pi \end{bmatrix}$$

وتكون مصفوفة تحويل التماثل حول نقطة الأصلO

هي

$$A_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

والان لتكن صورة النقطة A(x,y) تحت تأثير تحويل التماثل حول نقطة الأصل A`=(x`,y`)
ولكون

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x`\\ y`\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x`\\ y`\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-x\\ -y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow A`(x`,y`)=(-x,-y).$$

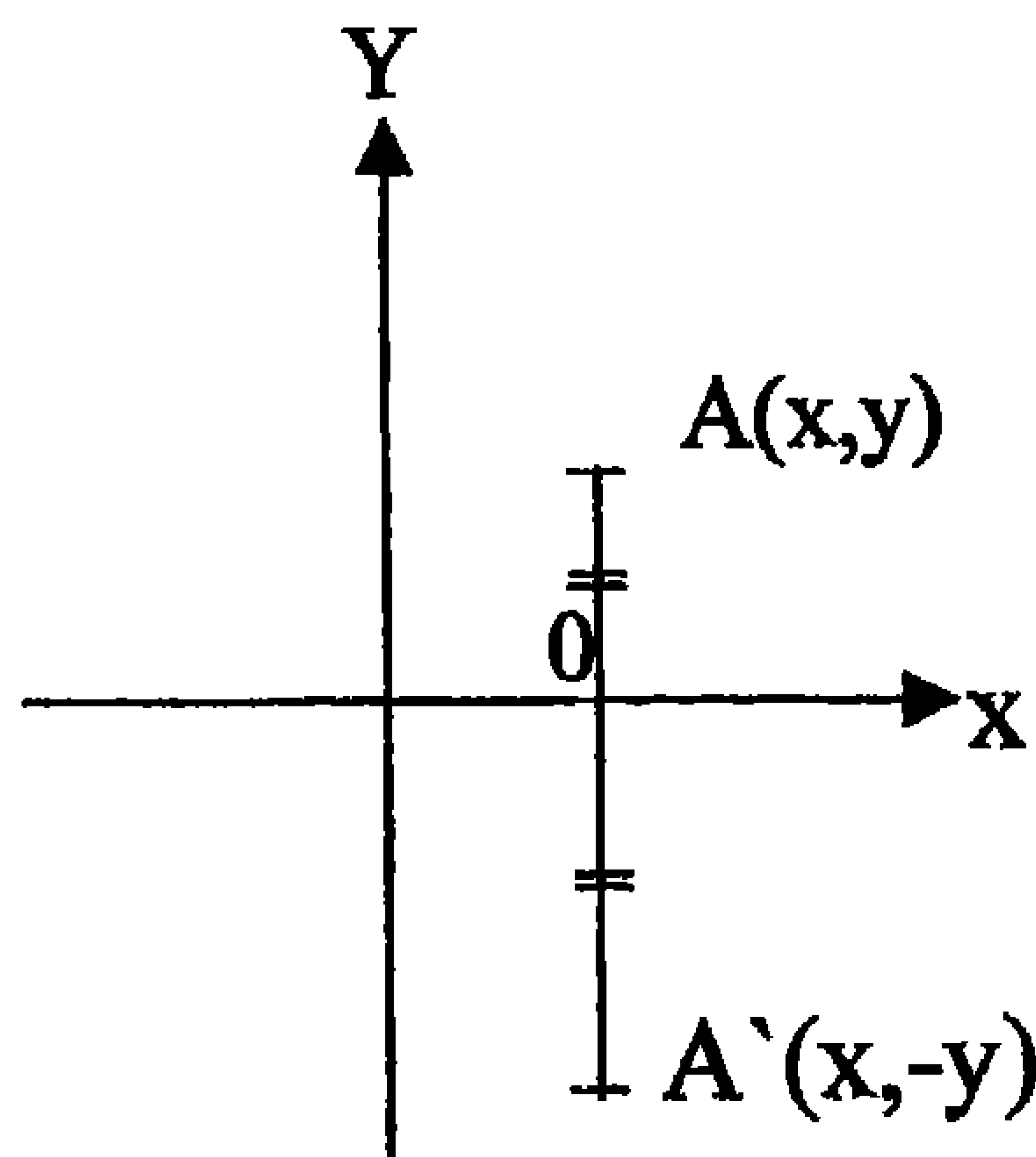
مثال(4-22): أوجد صورة النقطة A(-3,4) تحت تأثير التحويل التماثل حول نقطة الأصل

الحل: بالاستفادة من العلاقة أعلاه نجد أن

$$A`=(3,-4)$$

b) التماثل حول محور x

إن صورة النقطة A=(x,y) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور السينات هي A`=(x,-y)
وهذا واضح في شكل(4-7)



شكل(4-7)

وتكون مصفوفة تحويل التماثل هي

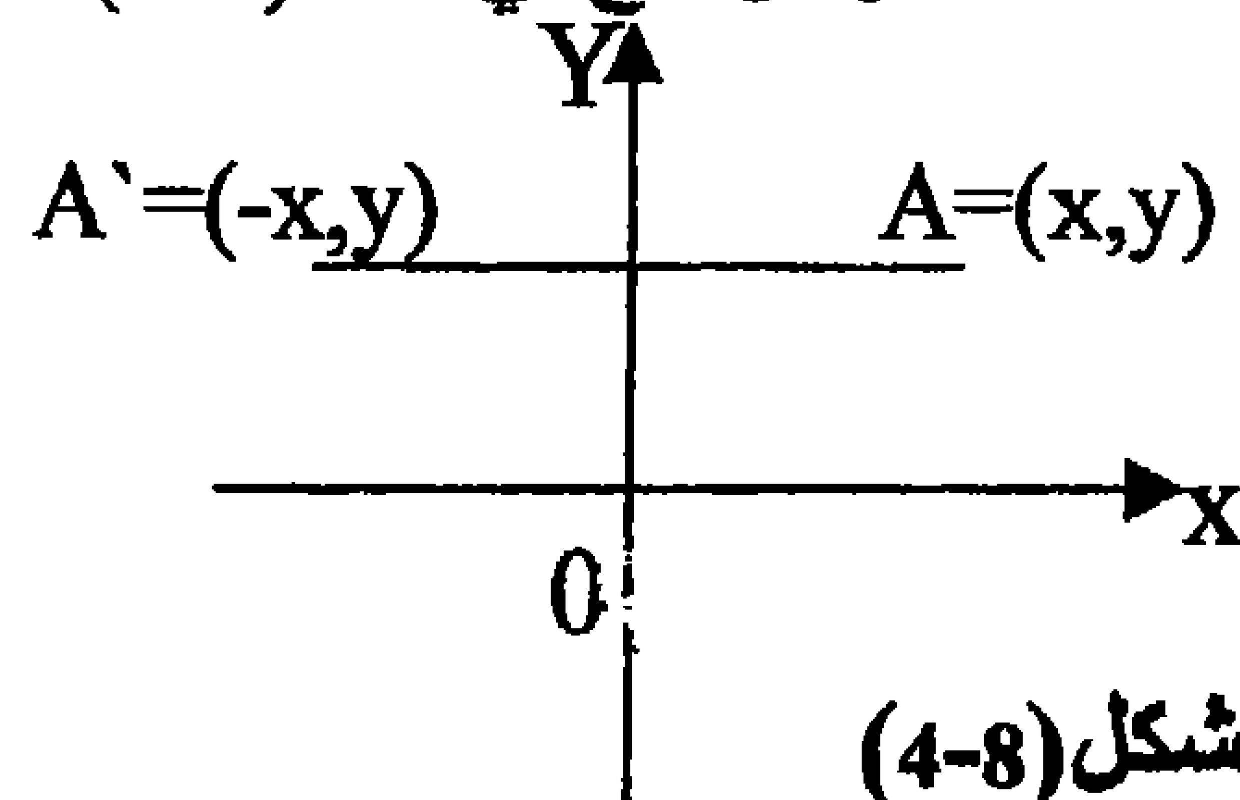
$$A_x=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

مثال(4-23): أوجد صورة النقطة A=(7,2) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور السينات.

الحل: بالاستفادة من القاعدة أعلاه فان صورة النقطة هي A`=(7,-2)

c) التماثل حول محور Y

إن صورة النقطة $A=(x,y)$ تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات هي $A`=(-x,y)$ كما هو موضح في شكل(4-8)



شكل(4-8)

وتكون مصفوفة تحويل التماثل

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال(4-24): أوجد صورة النقطة $(-3,0)$ تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات.

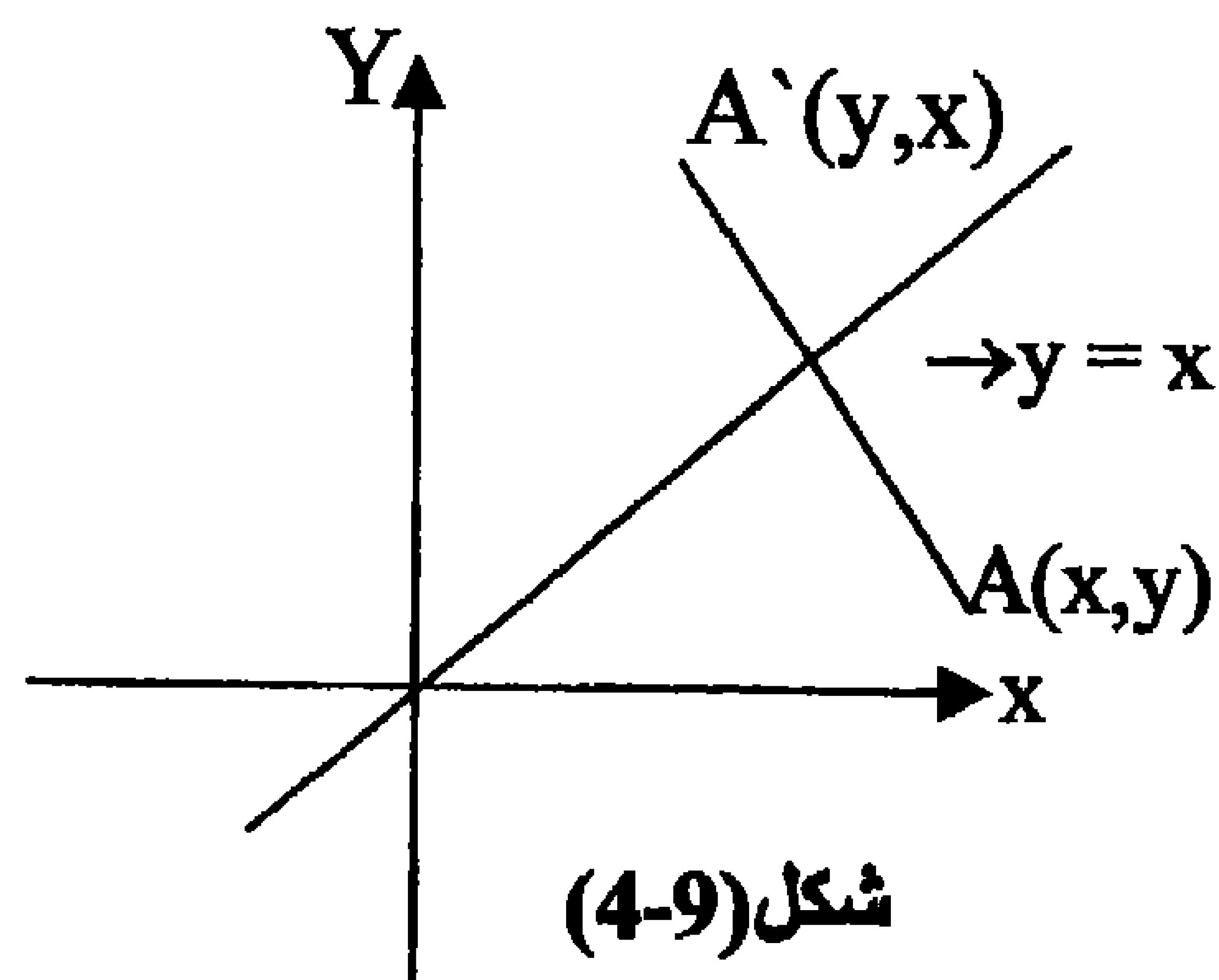
الحل: بالاستفادة من العلاقة أعلاه فان صورة النقطة $A`=(3,0)$

d) التماثل حول منصف الزاوية الأول(الأيمن)

إن صورة النقطة $A=(x,y)$ حول محور التماثل $y=x$ هو $A`=(y,x)$ وتكون مصفوفة تحويل التماثل

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

كما هو واضح في شكل(4-9)



شكل(4-9)

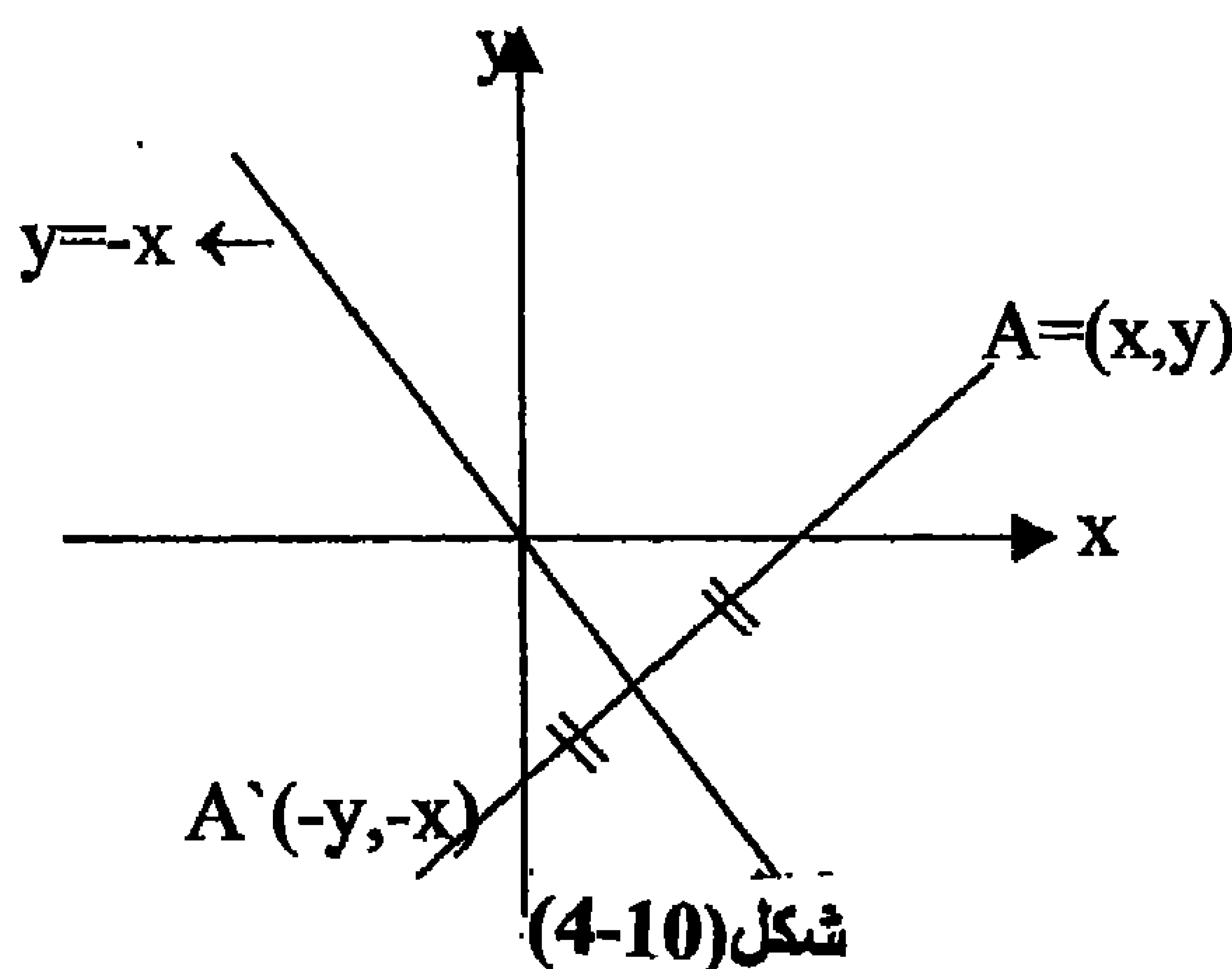
مثال(4-25): أوجد صورة النقطة (4,-1) تحت تأثير تحويل التماثل لمحور y=x.

الحل: بالاستفادة من العلاقة أعلاه فان A`=(-1,4)

e) التماثل حول منصف الزاوية الثاني(الأيسر)
إن صورة النقطة A=(x,y) تحت تأثير محور التماثل الثاني y=-x هي A`=(-y,-x)
وتكون مصفوفة التماثل

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و الشكل(4-10) يوضح ذلك.



شكل(4-10)

مثال(4-26): أوجد صورة النقطة A=(-6,1) تحت تأثير تحويل التماثل y=-x.

الحل: إن صورة النقطة هي A`=(-1,6) وذلك حسب العلاقة أعلاه.

4-6-4 التحويل الهيموتيتي:
تعريف(4-9): على اعتبار أن

$$k \in R$$
$$\forall \vec{A} = (x, y) \in R^2 \Rightarrow H_k(\vec{A}) = k.A$$

فانه يقال للاقتران المعرف

$$H : R^2 \rightarrow R^2$$

الاقتران الهيموتيتي. ويقال للنقطة $O = (0,0)$ بمركز الهيموتيتي وللعدد k بالتناسب الهيموتيتي ولكون $A=(x,y)$ فان العبارة

$$H_k(\vec{A}) = k.\vec{A}$$

وتكتب أيضا على الصورة

$$H_k(x,y) = (kx, ky)$$

أما مصفوفة تحويل الهيموتيتي فإنها تكتب على النحو التالي:

$$H_k(\vec{e_1}) = k\vec{e_1} = k(1,0) = (k,0)$$

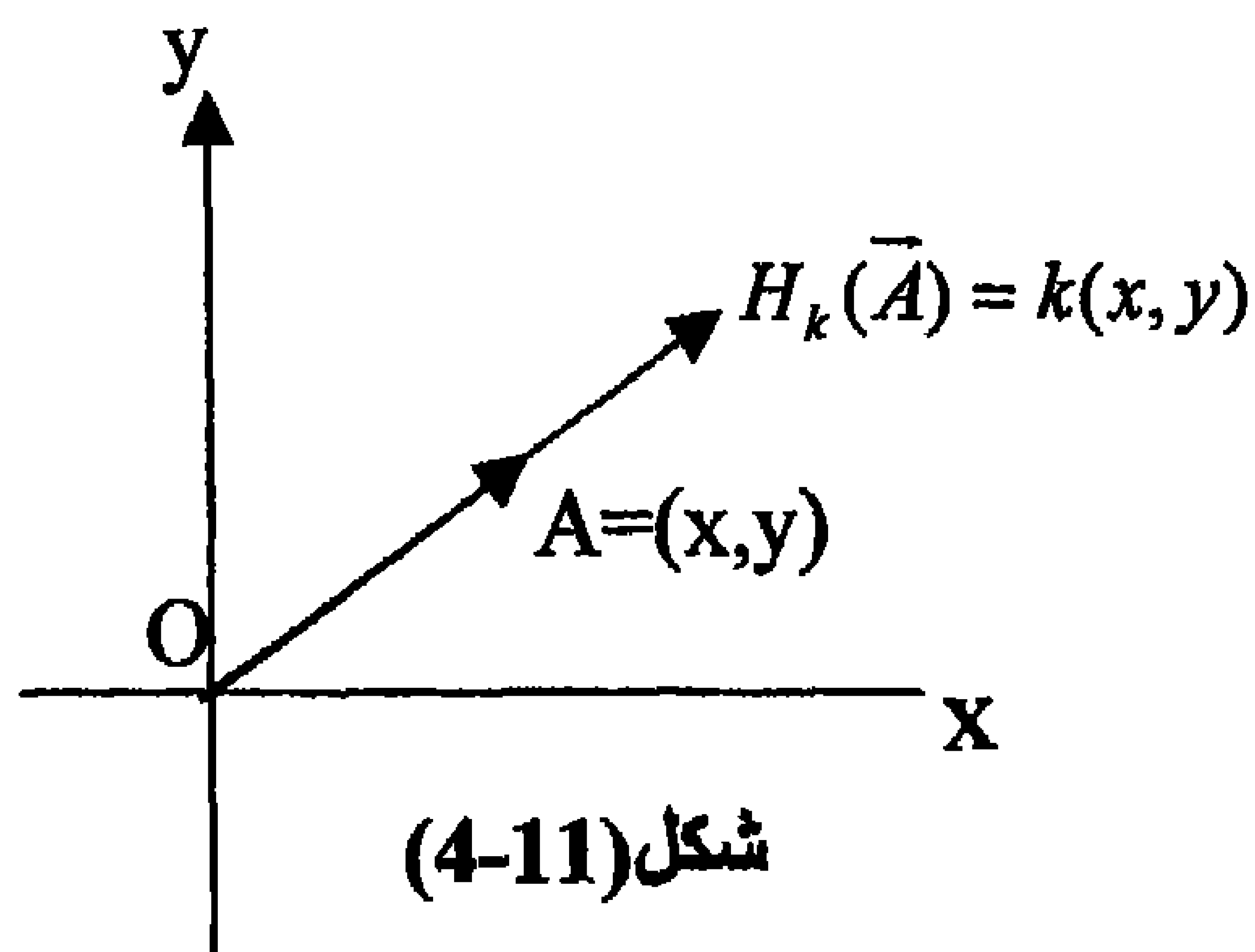
ومن كون

$$H_k(\vec{e_2}) = k\vec{e_2} = k(0,1) = (0,k)$$

فان

$$A_H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

والشكل(4-11) يوضح ذلك



شكل(4-11)

مثال(4-27): أوجد صورة النقطة P(3,-4) تحت تأثير التحويل H_{-2}

الحل:

$$H_{-2}(\vec{A}) = -2\vec{A} = -2(3,-4) = (-6,8)$$

ملاحظات a) إن التحويل الهيموتيتي هو تحويل خطي.

b) إن التحويل الهيموتيتي يحافظ على قياس الزوايا.

c) إن صورة كل نقطة من نقاط المستوى تحت تأثير H_0 هي (0,0).

d) إن تركيب تحويلين هيموتيتين هو تحويل هيموتيتي أي

$$H_k \circ H_p = H_{kp}$$

4-6-5 تحويل التشابه

تعريف(4-10): إن التحويل الناشئ عن تركيب تحويلين ، تحويل الدوران حول نقطة الأصل بزاوية قدرها α ، والتحويل الهيموتيتي مركزه نقطة الأصل بمعامل تناسب k يسمى بتحويل التشابه وسنرمز له بالرمز

$$B_{(\alpha,k)} = D_\alpha \circ H_k$$

$$A_B = \begin{bmatrix} Cos\alpha & -Sin\alpha \\ Sin\alpha & Cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kCos\alpha & -kSin\alpha \\ kSin\alpha & kCos\alpha \end{bmatrix}$$

أما مصفوفة تحويل التشابه

مثال(4-28): أوجد صورة النقطة (2,3-) تحت تأثير تحويل التشابه

$$B_{(\frac{\Pi}{2},4)}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 4Cos\frac{\pi}{2} & -4Sin\frac{\pi}{2} \\ 4Sin\frac{\pi}{2} & 4Cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} = (-12,-8)$$

مثال(4-29): إذا كانت

$$B_{(\pi,4)-(x,y)=(-12,8)}$$

أوجد قيم x,y للنقطة(x,y).

الحل: لكون

$$\begin{bmatrix} S\,4Cos\pi & -Sin\pi \\ 4\sin\pi & 4Cos\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

فإننا نكتب المساواة التالية

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4x \\ -4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

وعليه

$$(-4x,-4y)=(-12,8)$$

أو

$$(x,y)=(3,-2)$$

مثال(4-30): على اعتبار أن

$$D_{\frac{3\pi}{2}}\circ S_y(x,y)=(4,-3)$$

أوجد النقطة(x,y)

الحل: من كون أن صورة النقطة (x,y) تحت تأثير تحويل التماثل حول محور الصادات هي (-x,y) فان مصفوفة تحويل التماثل هي

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ومصفوفة تحويل الدوران

$$D_{\frac{3\pi}{2}}=\begin{bmatrix}Cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2}\\ Sin\frac{3\pi}{2} & Cos\frac{3\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

وعليه فان مصفوفة تحويل التركيب

$$D_{\frac{3\pi}{2}}\circ S_y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

وعليه فان صورة النقطة (x,y) تحت تأثير تحويل التركيب

$$(D_{\frac{3\pi}{2}}\circ S_y)(x,y)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ -x\end{bmatrix}$$

ولكون

$$\begin{bmatrix}y\\ -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -3\end{bmatrix}\Rightarrow x=3,y=4,(x,y)=(3,4)$$

مثال(4-31): لدينا التحويلين الخطيين المعرفين

$$f: R^2 \to R^2, g: R^2 \to R^2$$

بالقاعدتين

$$f(x,y) = (x-2y,y) \;,\; g(x,y) = (x-y,3x+y)$$

أوجد a) مصفوفة التحويل لحاصل جمعf+g

b) مصفوفة التحويل لتركيب التحويلين

$$g \circ f$$

الحل: وعليه فان مصفوفة التحويل للتحويل f+g هي

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الطريقة الأولى

نكون أولا مصفوفة التحويل لكل التحويلين f,g فللتحويلf

$$f(x,y) = (x-2y,y) = (x-2y,0.x+y)$$

وعليه فان مصفوفة التحويل هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما بالنسبة للتحويل الثاني

$$g(x,y) = (x-y,3x+y)$$

فان مصفوفة التحويل هي

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

وللإجابة على المطلوبين بالطريقة الأولى فان

(a

$$f+g = A+B = \begin{bmatrix} 1+1 & -2-1 \\ 0+3 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(b

$$g \circ f = B.A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية

$$a)(f+g)(x,y)=(x-2y+x-y,y+3x+y)$$
$$=(2x-3y,3x+2y)$$

وعليه فان مصفوفة التحويل للتحويل

$$f+g$$

هي

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b)(g\circ f)(x,y)=g[f(x,y)]$$
$$=g[x-2y,y]=(x-2y-y,3(x-2y)+y)$$
$$=(x-3y,3x-5y)$$

وعليه فان مصفوفة التحويل للتحويل

$$g\circ f$$

هي

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

مثال(4-32): أوجد معادلة صورة المنحنى

$$y=x^2+2$$

تحت تأثير تحويل دوران زاويته 270° حول نقطة الأصل

الحل: إن مصفوفة تحويل الدوران بزاوية 270° حول نقطة الأصل هي

$$\begin{bmatrix} Cos270^\circ & -Sin270^\circ \\ Sin270^\circ & Cos270^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ولتكن النقطة P(x,y) على منحنى الاقتران

$$y=x^2+2$$

وصورتها تحت تأثير تحويل الدوران

$$p`(x`, y`)$$

وعليه فان

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \Rightarrow x` = y, y` = -x$$

وبالتعويض عن قيم x,y نحصل على صورة المعادلة

$$x` = (-y`)^2 + 2 \Rightarrow x` = y`^2 + 2$$

تمارين عامة
على الفصل الرابع
الأسئلة المقالية

س1) لدينا التحويل الخطي المعرف

$$f : R^2 \to R^2$$

بالقاعدة

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2 + x_1)$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي لهذا التحويل.

س2) أي من التحويلات التالية هو تحويل خطي مع التوضيح.

$A)T : R^2 \to R^2, T(x, y) = (x^2, y^2) >$

$B)T : R^3 \to R^2, T(x, y, z) = (x + y + z, 1).$

$C)T : R^2 \to R^3, T(x, y) = (xy, y, x).$

$D)T : R \to R^2, T(x) = (1, -1).$

$E)T : R \to R^2, T(x) = (2x, -x).$

س3) إذا كانت مصفوفة التحول الناشئة عن التحويل الخطي

$$f : R^2 \to R^2$$

هي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد صورة المتجه

$$\vec{a} = (4,9)$$

تحت تأثير هذا التحويل.

س4) لدينا التحويل الخطي المعرف من

$$f : R^2 \to R^2$$

بالقاعدة

$$f(x,y) = (x+2y, x, 2x-y)$$

أوجد مصفوفة التحويل لهذا التحويل الخطي.

س5) في التحويل الخطي

$$T : R^2 \to R^3$$

إذا كان

$$T(e_2) = (4,3)،\ T(e_1) = (3,2)$$

أوجد

$$T(x,y)$$

س6) لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو

$$f : R^3 \to R^3, f(x,y,z) = (x+y, 2x+z, x-y)$$

فإذا كانت A هي مصفوفة التحويل الخطي فأوجد هذه المصفوفة وأوجد محددها.

س7) في التحويل الخطي

$$f : R^3 \to R^3$$

وعلى اعتبار أنها

$$f(1,0,0) = (1,2,3), f(0,1,0) = (0,1,1), f(0,0,1) = (1,1,0)$$

أوجد

$$f^{-1}(2,3,4)$$

س8) في التحويلين الخطيين إذا كان

$$f : R^2 \to R^2 \quad , g : R^2 \to R^2$$

معرفين بالقاعدتين

$$f(x,y) = (x,-y), g(x,y) = (y,x)$$

أوجد

$$(g \circ f)(x,y)$$

س9) لدينا مصفوفة التحويل الخطي المعرف من

$$f: R^3 \rightarrow R^2$$

وهي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد

$$f(1,2,3)$$

س**10**) لدينا التحويل الخطي

$$f: R^2 \rightarrow R^2$$

وعلى اعتبار أن

$$f(3,1) = (2,-4), f(-2,0) = (-2,6)$$

أوجد

$$f(\overline{e_1} + \overline{e_2})$$

س**11**) لدينا التحويلين الخطيين معرفين من

$$R^3 \rightarrow R^3$$

على النحو

$$f(x,y,z) = (x+2z, y-x, z+y),$$
$$g(x,y,z) = (0,x,y).$$

أوجد مصفوفة التحويل لتركيب التحويلين

$$g \circ f$$

س**12**) لدينا التحويلين المعرفين من

$$R^3 \rightarrow R^2$$

على النحو التالي

$$f(x,y,z) = (2x, y+z), g(x,y,z) = (z-x, y)$$

أوجد مصفوفة التحويل

$$2f - 5g$$

س13) لدينا التحويلات الخطية المعرفة على النحو

$$f : R^3 \to R^2 , g : R^3 \to R^3 , h : R^2 \to R^2$$

بالقواعد التالية

$$f(x,y,z) = (x+y,z) \ , g(x,y,z) = (x, y-z) \ , h(x,y) = (2x,y).$$

أوجد مصفوفة التحويل

$$h \circ (f+g)$$

أسئلة موضوعية
على الفصل الرابع

س1) إذا كان f,g تحويلان خطيان من

$$R^3 \to R^2$$

معرفان على النحو

$$f(x,y,z) = (2x, y+z), g(x,y,z) = (x-z, y)$$

فان مصفوفة التحويل ل 2f-5g هي

$A)\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ $D)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

س2) لدينا التحويلين الخطيين f,g من

$$R^3 \to R^3$$

معرفين بالقاعدتين

$$f(x,y,z) = (x+2z, y-x, z+y), g(x,y,z) = (0,x,y)$$

فان مصفوفة التحويل الخطي لـ:

$$g \circ f$$

هي

$A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$D)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

س3) على اعتبار أن

$$B_{(\pi,4)}(x,y) = (-12,8)$$

فان النقطة (x,y) هي

$A)(3,-2)$ $B)(-3,2)$ $C)(-2,3)$ $D)(-4,1)$ $E)(-2,-3)$

س4) في التحويل الخطي

$$f : R^3 \to R^3$$

وعلى اعتبار أن

$$f(\overrightarrow{e_1}) = (-1,2,4), f(\overrightarrow{e_2}) = (3,-1,0), f(\vec{e}) = (-4,3,4)$$

فان رتبة مصفوفة التحويل هي

$A)1$ $B)2$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

س5) التحويلات f,g المعرفة على النحو

$$R^3 \to R^3 : f(x,y,z) = (x+y+z,0,0), g(x,y,z) = (y,z,x)$$

فان (f-g)(1,0,1)هي

$A)(-2,1,1)$ $B)(1,2,1)$ $C)(-1,2,1)$ $D)(2,-1,-1)$ $E)(1,1,-2)$

س6) لدينا التحويلات الخطية التالية

$$f : R^3 \to R^3, g : R^3 \to R^2, h : R^2 \to R^2$$

معرفة على النحو التالية

$$f(x,y,z) = (y,x+z), g(x,y,z) = (2z,x-y), h(x,y) = (y,2x)$$

فان قيمة

$$h \circ (f+g)(-1,2,3)$$

هي

$A)(-1,16)$ $B)(0,12)$ $C)(-1,10)$ $D)(0,14)$ $E)(12,-2)$

س7) لدينا التحويلين الخطيين والمعرفين على النحو

$$f : R^3 \to R^2, f(x,y,z) = (2x-y, x+3z),$$

$$g : R^3 \to R^2, g(x,y,z) = (x, y+z)$$

فان رتبة مصفوفة التحويل f+2g هي

$A)0$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

س8) لدينا التحويلين الخطيين المعرفين على النحو التالي

$$f : R^2 \to R^2, f(x,y) = (2x - y, 2y),$$
$$g : R^2 \to R^2, g(x,y) = (x + 2y, -2x)$$

فان مصفوفة التحويل للاقتران

$$(f \circ g)^{-1}$$

هي

$A)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B)\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C)\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$D)\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

س9) لدينا التحويلين f,g وهما تحويلا انسحاب معرفين كما يلي

$$R^2 \to R^2, f(x,y) = (x+2, y-1), g(x,y) = (x-3, y+4)$$

فان صورة النقطة(-3,2) تحت تأثير التحويل

$$g \circ f$$

هي

$A)(1,5)$ $B)(2,4)$ $C)(-3,4)$ $D)(1,2)$ $E)(-2,-1)$

س10) لدينا التحويل الخطي المعرف على النحو التالي

$$f : R^2 \to R^2, f(x,y) = (ax + by, cx + dy)$$

وعلى اعتبار أن

$$f(1,2) = (1,1), f(3,-2) = (3,-5)$$

فان مصفوفة التحويل للاقتران f هي

$A)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $B)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $C)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D)\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $E)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

س11) لدينا التحويل المعرف على النحو

$$f: R^3 \to R^3, f(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$

فان بعد الفضاء المتجه الصفري لهذا التحويل f هو

$A)1 \quad B)2 \quad C)3 \quad D)4 \quad E)5$

س12) إذا كان المستوى R^2 والمعرف عليه تركيب التحويلين

$$H_k \circ D_\pi : R^2 \to R^2$$

وكانت صورة النقطة(-2,3) تحت تأثير تركيب التحويلين هي(6,-9) فان صورة النقطة (3,2) تحت تأثير التحويل هي.

$A)(-6,9) \quad B)(-6,-9) \quad C)(-9,6) \quad D)(-9,-6) \quad E)(9,6)$

س13) لدينا فضاء المتجه

$$A = \{(x,y) \in R^2 : 2x = 3y\} \subset R^2$$

فان قاعدة هذا الفضاء المتجه الجزئي هي

$A)(-2,-3) \quad B)(-2,3) \quad C)(2,3) \quad D)(3,2) \quad E)(-3,-2)$

س14) لدينا تحويلي الانسحاب

$$f_a : R^2 \to R^2, a = (-4,1), f_b : R^2 \to R^2, b = (-4,1)$$

فان صورة التركيب

$$f_a \circ f_b (7,2)$$

هي

$A)(9,7) \quad B)(-2,6) \quad C)(4,-1) \quad D)(5,8) \quad E)(8,0)$

س15) لدينا التحويل الخطي

$$R^2 \to R^2$$

وان مصفوفة التحويل هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فان صورة معادلة الخط المستقيم

$$3x - 2y - 5 = 0$$

تحت تأثير هذا التحويل هي

$A)2x-3y-5=0 \quad B)2x+3y+5=0 \quad C)3x+y+5=0$

$D)3x+2y-5=0 \quad E)2x-3y+5=0$

س15) إذا كان لدينا تحويلي التماثل

$$S_O(0,0)$$

حول نقطة الأصل، S_x حول محور السينات، فان صورة النقطة (-3,4) تحت تأثير

تركيب التماثل

$S^2{}_{x} \circ S^2{}_{o}(-3,4)$

هي

$A)(0,3)$ $B)(3,-4)$ $C)(-3,4)$ $D)(4,-3)$ $E)(-4,3)$

س16) إن صورة المجموعة

$k = \{(x,y) : x^2 - y + 2 = 0, x \in R\}$

تحت تأثير الدوران

$D_{\frac{3\pi}{2}}$

حول نقطة الأصل O(0,0) هي

$A) y - x + 2 = 0$ $B) y^2 - x^2 + 2 = 0$ $C) y^2 - 2x + 2 = 0$

$D) y^2 - x + 2 = 0$ $E) y^2 + x - 4 = 0$

أساسيات في
المصفوفات والمتجهات



دار المنهجية

الدار المنهجية للنشر والتوزيع

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري

تلفاكس: 4611169 6 962+

E-mail: info@Almanhajiah.com

ص. ب: 922762 عمان 11192 الأردن

